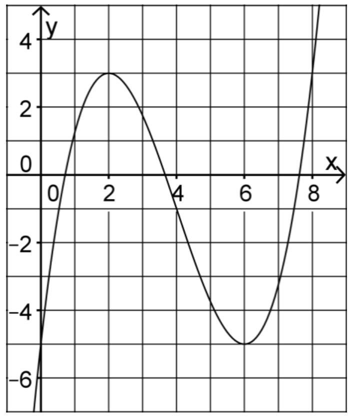
Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-5$ und Definitionsmenge IR. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



a) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_f.

Betrachtet wird die Gleichung $f(x)=c$ mit $c \in \mathrm{IR}$.

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von c.

(4,5 VP)

b) Durch Verschiebung von G_f um 4 in negative x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung entsteht der Graph einer Funktion g.

Geben Sie einen Term von g an, an dem man diese Verschiebung erkennen kann.

Ein vereinfachter Term von g ist $g(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$.

Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Punkts $(4\,|\,-1)$ ist.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass $\int_1^3 f(x)\,dx=5$ gilt.

Bestimmen Sie damit ohne Verwendung einer Stammfunktion den Wert des Integrals $\int_5^7 f(x)\,dx$ und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in der Abbildung in der Anlage.

(6,5 VP)

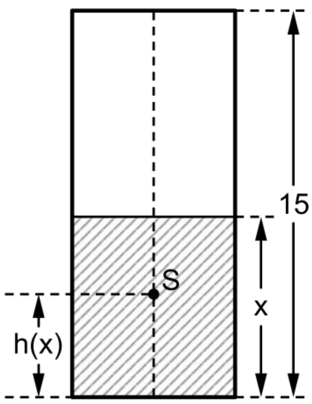
c) Die Funktion f gehört zur Schar der in IR definierten Funktionen f_a mit $f_a(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+ax-5$ und $a \in \mathrm{IR}$.

Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

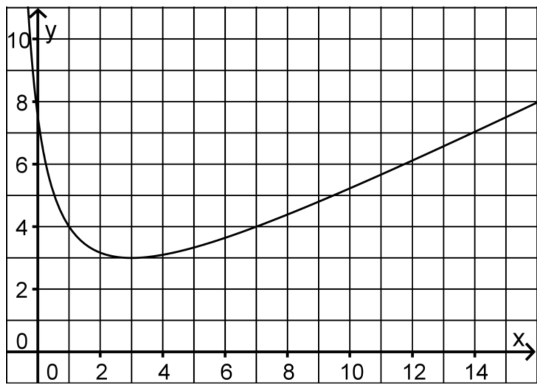
Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von a der Graph G_a keinen Punkt besitzt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft. (2 VP)

Aufgabe 1.2

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm (vgl. Abbildung rechts).



Die Abbildung unten zeigt den Graphen G_h der Funktion h, die für $0 \leq x \leq 15$ die Höhe des Schwerpunkts S über dem Dosenboden in Zentimetern angibt; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern. G_h hat den Tiefpunkt $(3|3)$.



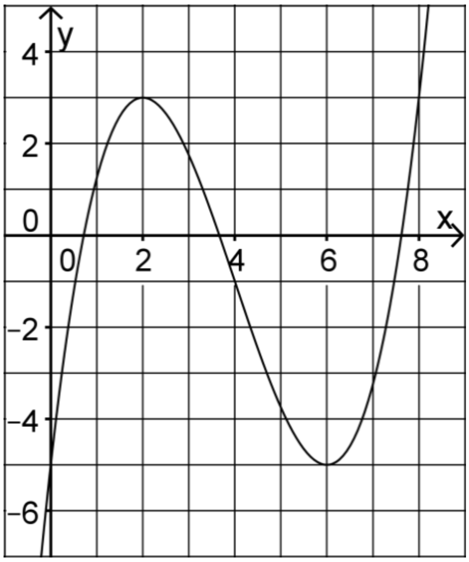
a) Ermitteln Sie grafisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt auf halber Höhe der Dose liegt.
Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist.
Beschreiben Sie die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs.
Stellen Sie für den Moment, in dem sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe befindet, Dose, Füllhöhe und Schwerpunkt schematisch dar und beschreiben Sie die Besonderheit dieser Situation.

(3 VP)

b) Für die Funktion h gilt $h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt 4 cm über dem Dosenboden liegt. (2 VP)

c) Nun wird eine andere vertikal stehende Dose betrachtet, die ebenfalls die Form eines geraden Zylinders hat. Sowohl bei leerer als auch bei vollständig gefüllter Dose liegt der gemeinsame Schwerpunkt von Dose und enthaltener Flüssigkeit genau in der Mitte der Dose. Ist diese Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 11 cm.
Die Höhe des Schwerpunkts wird durch eine Funktion k mit $k(x) = \frac{1}{2}x + s + \frac{t}{x+1}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ beschrieben.
Bestimmen Sie die passenden Werte von s und t. (2 VP)

Anlage zu Aufgabe 1.1



In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Körper ABCDPQRS mit $A(28|0|0)$, $B(28|10|0)$, $C(0|10|0)$, $D(0|0|0)$ und $P(20|0|6)$ gegeben.
Die Grundfläche ABCD, die Deckfläche PQRS und die vier Seitenflächen des Körpers sind Parallelogramme.

a) Stellen Sie den Körper in einem Koordinatensystem grafisch dar.
Die Seitenfläche ABQP liegt in einer Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(Teilergebnis: $E: 3x_1 + 4x_3 = 84$) (3 VP)

Der Körper beschreibt modellhaft den unteren Teil eines Kunstwerks aus massivem Beton, der auf einer horizontalen Fläche steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 0,1 m in der Wirklichkeit. Dieser untere Teil ist mit einer dünnen geradlinigen Bohrung versehen, die im Modell vom Punkt $G(11|3|6)$ der Deckfläche aus in Richtung des Schnittpunkts der Diagonalen der Grundfläche verläuft. In der Bohrung ist eine gerade Stahlstange mit einer Länge von 1,4 m so befestigt, dass die Stange zu drei Vierteln ihrer Länge aus der Deckfläche herausragt und in einer Höhe von 0,9 m über der Deckfläche endet. Ihr Durchmesser wird im Modell vernachlässigt.

b) Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Stange in der Bohrung endet.
(3 VP)

c) Auf der Deckfläche des Betonkörpers liegt eine Stahlkugel mit einem Durchmesser von 0,8 m. Im Modell berührt die Kugel die Deckfläche des Körpers im Punkt K.
Beschreiben Sie, wie man im Modell rechnerisch überprüfen könnte, ob die Stahlkugel die Stange berührt, wenn die Koordinaten von K bekannt wären.
(2 VP)

d) Zum Schutz vor Beschädigungen während einer Baumaßnahme soll diejenige Seitenfläche des Kunstwerks, die im Modell durch das Quadrat ABQP dargestellt wird, mit einer rechteckigen Holzplatte so versehen werden, dass diese am Kunstwerk anliegt, sowohl unten als auch seitlich bündig mit diesem abschließt und in einer Höhe von 1 m über der Deckfläche endet.
Untersuchen Sie, ob die Lage der Stahlstange das Anbringen der Holzplatte zulässt.
(2 VP)

Die Bewegungen zweier Forschungs-U-Boote U_1 und U_2, die von einer Forschungsstation mithilfe eines Sonarsystems geortet werden, sollen modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Im Modell, das den Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.27 Uhr erfasst, bewegen sich beide U-Boote geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, U_1 entlang der Geraden g_1, U_2 entlang der Geraden g_2. Die Positionen von U_1 um 12.20 Uhr und 12.21 Uhr werden durch die Punkte $P_0(4|14|-5)$ bzw. $P_1(6|11|-5)$ dargestellt, die Positionen von U_2 zu denselben Zeitpunkten durch $Q_0(11|9|-15)$ bzw. $Q_1(9|6|-13)$. Die Wasseroberfläche wird durch die x_1x_2-Ebene, die Lage der Forschungsstation durch den Punkt $F(12|11{,}5|0)$ beschrieben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Realität.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von g_1.
Geben Sie für den dabei verwendeten Parameter das Intervall an, das dem erfassten Zeitraum entspricht.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes an, der die Position von U_1 um 12.27 Uhr darstellt.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeit von U_1 in Knoten (1 Knoten $\approx$ 1,852 km/h).

(3 VP)

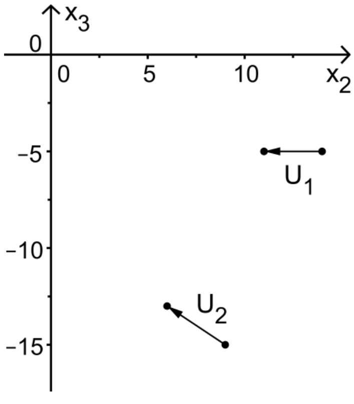
b) Die Geraden g_1 und g_2, entlang derer sich U_1 und U_2 im Modell bewegen, sind windschief zueinander.
Beschreiben Sie, wie man dies mithilfe der Gleichungen von g_1 und g_2 zeigen könnte.
Geben Sie für jeden Schritt des beschriebenen Vorgehens die Bedeutung hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Geraden an.

(1,5 VP)

c) Um 12.23 Uhr wird die Position des U-Boots U_1 durch den Punkt $R(10|5|-5)$ dargestellt.
Zeigen Sie, dass der Punkt R von der Geraden g_2 den Abstand 7 hat.
Begründen Sie, dass daraus nicht geschlossen werden kann, dass die U-Boote um 12.23 Uhr 700 m voneinander entfernt sind.

(3,5 VP)

d) Die Abbildung zeigt die Bewegungen von U_1 und U_2 im Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.21 Uhr als senkrechte Projektion in die x_2x_3-Ebene.
Stellen Sie die Bewegungen der beiden U-Boote für den gesamten erfassten Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.27 Uhr als senkrechte Projektion in die x_1x_2-Ebene grafisch dar.
Begründen Sie anhand dieser beiden Projektionen, dass sich die Geraden, entlang derer sich U_1 und U_2 bewegen, nicht schneiden.



(2 VP)

Die Firmen A und B stellen Lampen her und liefern diese anschließend an Händler aus. Der Anteil defekter Lampen unter ausgelieferten Lampen der Firma A beträgt im Mittel 9 %, unter ausgelieferten Lampen der Firma B im Mittel 7 %. Im Folgenden soll sowohl für die Lampen der Firma A als auch für die Lampen der Firma B angenommen werden, dass diese unabhängig voneinander Defekte aufweisen.

a) Betrachtet werden Lampen, die von der Firma A ausgeliefert wurden.

Zehn Lampen werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens sechs Lampen nicht defekt sind.

500 Lampen werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % abweicht.

(2,5 VP)

b) Einem Händler werden Lampen geliefert, die in Kartons verpackt sind; jeder Karton enthält 30 Lampen. Der Händler wählt aus jedem Karton zwei Lampen zufällig aus und prüft diese. Sind bei einem Karton die beiden ausgewählten Lampen nicht defekt, so nimmt er diesen Karton an, ansonsten nicht.

Ein Karton enthält sechs defekte Lampen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt.

Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50 % beträgt.

(4 VP)

c) Ein Discounter bezieht 35 % der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A und 65 % von der Firma B. Der Einkaufspreis beträgt 0,98 Euro für eine Lampe der Firma A und 1,02 Euro für eine Lampe der Firma B. Im Zusammenhang mit dem Einkauf findet keine Prüfung der Lampen statt. Für Kunden des Discounters sind die Lampen der beiden Firmen nicht unterscheidbar; der Verkaufspreis beträgt unabhängig vom Hersteller 1,49 Euro. Jede von einem Kunden ausgewählte Lampe wird an der Kasse geprüft: Ist eine Lampe defekt, so wird sie entsorgt.
Bestimmen Sie den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn des Discounters.

(3,5 VP)