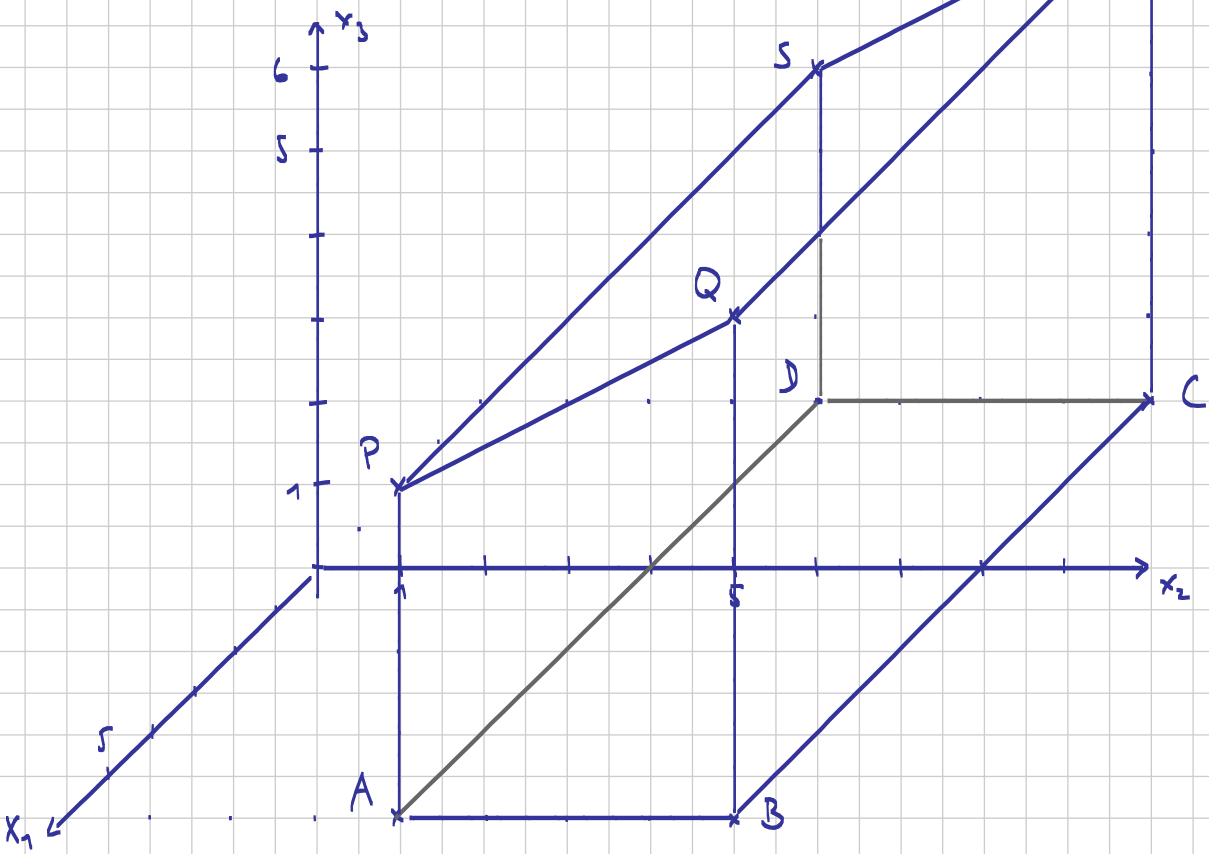
2011 Analytische Geometrie II. 1

A(6|4|0), B(6|8|0), C(-4|8|0), D(-4|4|0)
P(6|4|4); Q(6|8|6); R(-4|8|6); S(-4|4|4)



a) Volumen der Truhe

$V_{Truhe} = G \cdot h$ $\qquad G \mathrel{\hat=}$ Trapez $\qquad h = |\vec{BC}|$

Fläches des Trapez

$$A_T = \frac{|\vec{BQ}| + |\vec{AP}|}{2} \cdot |\vec{AB}| = \frac{6+4}{2} \cdot 4 = 20$$

1) $\vec{BQ} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 8-8 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{BQ}| = 6$

3) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 8-4 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 4-4 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{AP}| = 4$

$|\vec{AB}| = 4$

(ODER ABLESEN)

Höhe h

$$h = \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4-6 \\ 8-8 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{BC}| = 10$$

Insgesamt: $V = 20 \cdot 10 = 200$

Koordinatengleichung der Ebene E durch PQRS

$P(6|4|4)$, $Q(6|8|6)$, $R(-4|8|6)$; $S(-4|4|4)$

1) Parameterform von E:

$$E: \vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{PQ} + s \cdot \vec{PS}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 8-4 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PS} = \begin{pmatrix} -4-6 \\ 4-4 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) a) Normalenvektor

[redacted]

4	0
2	0
0	-10
4	0

[redacted]

1, 2, 3

$0 - 0$
$-20 - 0$
$0 - (-40)$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Normalenform

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

3) Koordinatenform

$E: \; -x_2 + 2x_3 = 4$ bzw. $E: \; x_2 - 2x_3 = -4$

b)

$E_a: \; x_2 - a x_3 = 8 - 6a$

Deckel: $E: \; x_2 - 2x_3 = -4$

für $a=2$ gilt: $E_2: \; x_2 - 2x_3 = 8 - 6 \cdot 2$

$x_2 - 2x_3 = -4$ ✓

Koordinatengleichung der Rückwand

$R: \; x_2 = 8 \Rightarrow a = 0$ ablesen oder berechnen

Gerade, die in allen Ebenen der Schar liegt

Vermutung: Gerade g durch Q und R liegt in allen Ebenen.

1) Gerade g aufstellen

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t\,\overrightarrow{QR} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -4-6 \\ 8-8 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d.h. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Somit gilt: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 6 - 10t \\ x_2 = 8 \\ x_3 = 6 \end{array}\right\}$ in E_a einsetzen.

$E_a: \quad x_2 - a x_3 = 8 - 6a$

$8 - a \cdot 6 = 8 - 6a$

$0 = 0$

$\Rightarrow$ wahre Aussage

Schnittwinkel φ von E_0 und E_2

$E_0: \quad x_2 = 8 \quad \Rightarrow \quad n_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_2: \quad x_2 - 2x_3 = -4 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

Somit gilt: $\cos\varphi = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63{,}4^\circ$

Taschenrechner auf „Degree"

Weitere Ebene E_a, die mit E_2 den Winkel $\varphi = 63{,}4°$ einschließt

$E_a: \quad x_2 - a x_3 = 8 - 6a \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$

$E_2: \quad x_2 - 2x_3 = -4 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

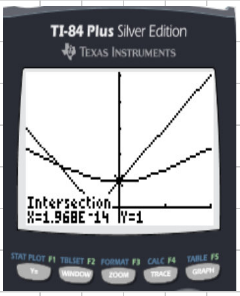
$$\cos(63{,}4°) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}}$$

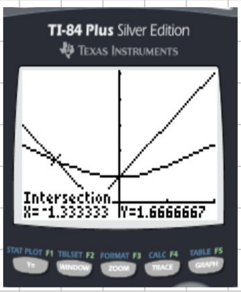
s.o.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}} \quad \Big| \cdot \sqrt{5}$$

$$1 = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2}} \quad \Big| \cdot \sqrt{1+a^2}$$

$$\sqrt{1+a^2} = |1+2a|$$





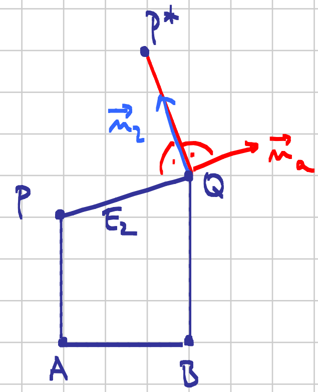
1. Lösung $a = 0$ (dieser Wert ist nicht gesucht)

2. Lösung $a = -1{,}\overline{3} = -\frac{4}{3}$

Die Ebene $E_{-\frac{4}{3}}$ schließt mit E_2 einen Winkel von $63{,}4°$ ein.

c)

Skizze



Normalenvektor von E_2 $\quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

von E_a $\quad \vec{n}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$

Es muss gelten: $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} = 0$$

$$1 + 2a = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Der Deckel liegt nach der Öffnung in der Ebene $E_{-\frac{1}{2}}$.

Koordinaten von P*

(1) Gerade h durch Q aufstellen mit $\vec{n}_2$ als Richtungsvektor $\qquad Q(6|8|6)$

Skizze

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2) P* liegt auf h $\Rightarrow$ $P^*(6 \mid 8+r \mid 6-2r)$

(3) Es gilt $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{QP^*}|$

a) $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 4-8 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $|\overrightarrow{QP}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

(4) Somit muss gelten: $|\overrightarrow{QP^*}| = \sqrt{20}$

a) $\overrightarrow{QP^*} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ 8+r - 8 \\ 6-2r - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -2r \end{pmatrix}$

b) $|\overrightarrow{QP^*}| = \sqrt{r^2 + (-2r)^2} = \sqrt{20}$

$$\sqrt{5r^2} = \sqrt{20} \quad | \, (\,)^2$$

$$5r^2 = 20$$

$$r^2 = 4$$

$$r = \pm 2$$

Für $r = 2$ gilt $P_1^*(6|10|2)$ $\qquad P^*(6\,|\,8+r\,|\,6-2r)$

Für $r = -2$ gilt $P_2^*(6|6|10)$ $\qquad P(6|4|4)$

Da P^* oberhalb von P liegen muss, kommt nur $P_2^*(6|6|10)$ in Frage.

x_3-Wert muss größer sein!