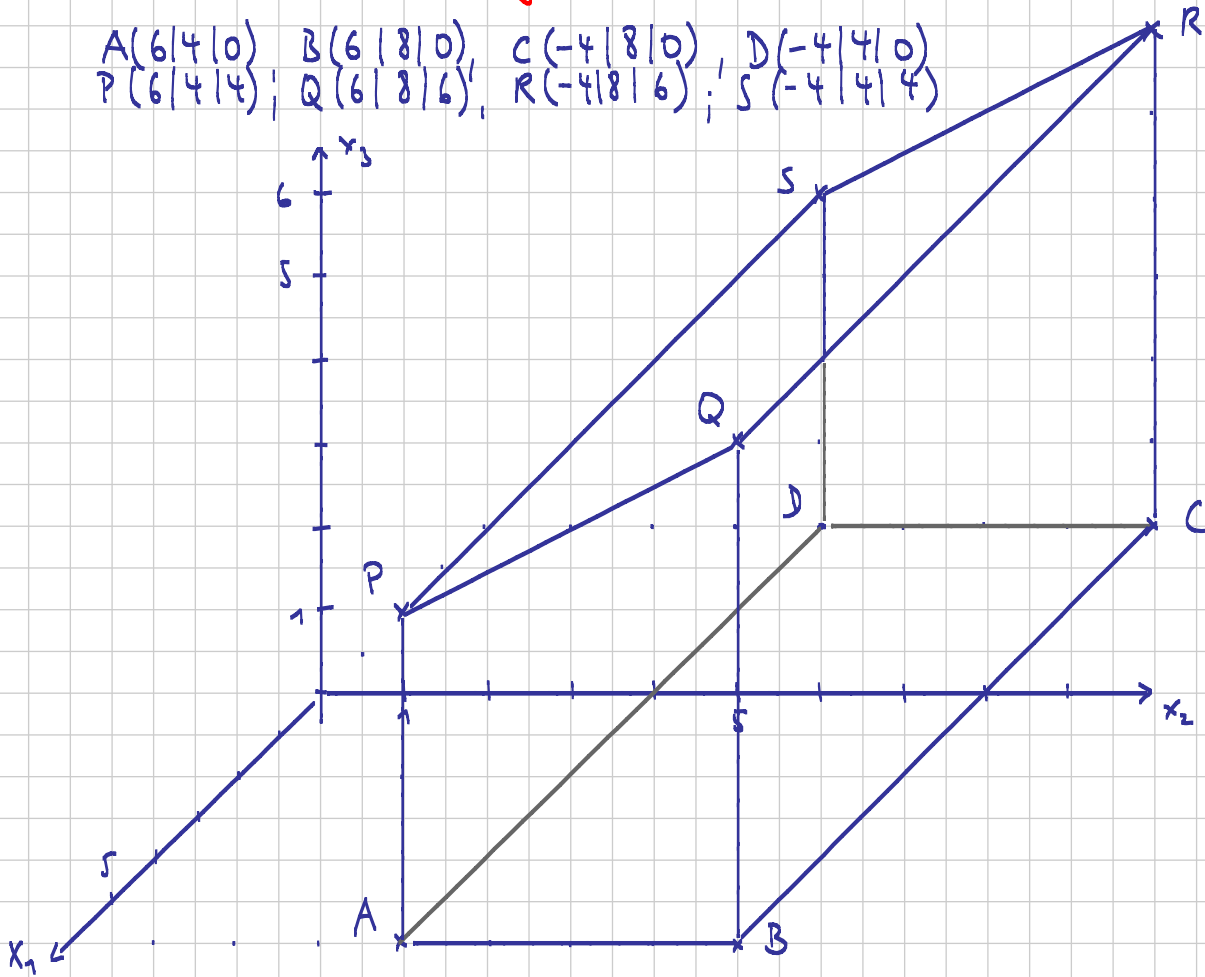


2011 Analytische Geometrie II.1

$$A(6|4|0), B(8|8|0), C(-4|8|0), D(-4|4|0) \\ P(6|4|4), Q(6|8|6), R(-4|8|6), S(-4|4|4)$$



a) Volumen der Truhe

$$V_{\text{Truhe}} = G \cdot h \quad G \hat{=} \text{Trapez} \quad h = |\vec{BC}|$$

Fläche des Trapez

$$A_T = \frac{|\vec{BQ}| + |\vec{AP}|}{2} \cdot |\vec{AB}| = \frac{6 + 4}{2} \cdot 4 = 20$$

$$1) \vec{BQ} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ 8 - 8 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad |\vec{BQ}| = 6 \quad 3) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ 8 - 4 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2) \vec{AP} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ 4 - 4 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad |\vec{AP}| = 4 \quad |\vec{AB}| = 4 \\ \text{(ODER ABLESEN)}$$

Höhe h

$$h = \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 - 8 \\ 8 - 8 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{BC}| = 12$$

Insgesamt: $V = 20 \cdot 10 = 200$ //

Koordinatengleichung der Ebene E durch PQRS

$P(6|4|4)$, $Q(6|8|6)$, $R(-4|8|6)$; $S(-4|4|4)$

1) Parameterform von E:

$$E: \vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{PQ} + s \cdot \vec{PS}$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 6 & - & 6 \\ 8 & - & 6 \\ 6 & - & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PS} = \begin{pmatrix} -4 & - & 6 \\ 4 & - & 4 \\ 4 & - & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) a) Normalenvektor

0	-10	
4		0
2		0
0	-10	
4		0
2		0

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -20 & 0 \\ 0 & -(-40) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} \leadsto \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Normalenform

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

3) Koordinatenform

$$E: -x_2 + 2x_3 = 4 \quad \text{bzw.}$$

$$E: x_2 - 2x_3 = -4$$

b) $E_a: x_2 - ax_3 = 8 - 6a$

Deckel: $E: x_2 - 2x_3 = -4$

für $a=2$ gilt: $E_2: x_2 - 2x_3 = 8 - 6 \cdot 2$

$$x_2 - 2x_3 = -4 \quad \checkmark$$

Koordinatengleichung der Rückwand

$$R: x_2 = 8 \quad \Rightarrow \quad a=0$$

ablesen oder berechnen

Gerade, die in allen Ebenen der Schar liegt

Vermutung: Gerade g durch Q und R liegt in allen Ebenen.

1) Gerade g aufstellen

$$g: \vec{x} = \vec{OQ} + t \vec{QR} \quad t \in \mathbb{R} \quad \vec{QR} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 8 & -8 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d.h. } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Somit gilt: } \left. \begin{array}{l} x_1 = 6 - 10t \\ x_2 = 8 \\ x_3 = 6 \end{array} \right\} \text{ in } E_a \text{ einsetzen.}$$

$$E_a: x_2 - ax_3 = 8 - 6a$$

$$8 - a \cdot 6 = 8 - 6a$$

$$0 = 0$$

☐ Wahre Aussage

Schnittwinkel φ von E_0 und E_2

$$E_0: x_2 = 8 \quad \rightarrow \quad \vec{m}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2: x_2 - 2x_3 = -4 \quad \rightarrow \quad \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2|}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|}$$

$$\text{Somit gilt: } \cos \varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \approx 63,4^\circ$$

Taschenrechner
auf „Degree“

Weitere Ebene E_a , die mit E_2 den Winkel $\varphi = 63,4^\circ$ einschließt

$$E_a: x_2 - ax_3 = 8 - 6a \quad \rightarrow \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$E_2: x_2 - 2x_3 = -4 \quad \rightarrow \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

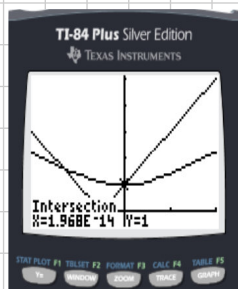
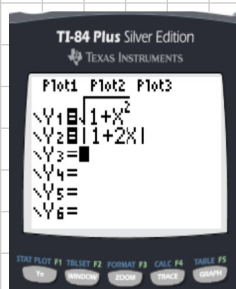
$$\cos(63,4^\circ) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}}$$

s.o.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}} \quad | \cdot \sqrt{5}$$

$$1 = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2}} \quad | \cdot \sqrt{1+a^2}$$

$$\sqrt{1+a^2} = |1+2a|$$



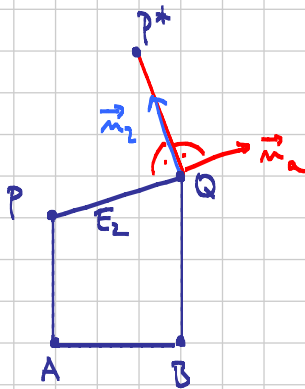
1. Lösung $a = 0$ (dieser Wert ist nicht gesucht)

2. Lösung $a = -1,3 = -\frac{4}{3}$

Die Ebene $E_{-\frac{4}{3}}$ schließt mit E_2 einen Winkel von $63,4^\circ$ ein.

c)

Skizze



Normalenvektor von E_2 $\vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

von E_a $\vec{m}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$

Es muss gelten: $\vec{m}_2 \cdot \vec{m}_a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} = 0$$

$$1 + 2a = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Der Deckel liegt nach der Öffnung in der Ebene $E_{-\frac{1}{2}}$.

Koordinaten von P^*

(1) Gerade h durch Q aufstellen
mit \vec{m}_2 als Richtungsvektor

$Q(6|8|6)$

Skizze



$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2) P^* liegt auf $h \rightarrow P^*(6 | 8+r | 6-2r)$

(3) Es gilt $|\vec{QP}| = |\vec{QP}^*|$

$$a) \vec{QP} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 4-8 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad b) |\vec{QP}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

(4) Somit muss gelten: $|\vec{QP}^*| = \sqrt{20}$

$$a) \vec{QP}^* = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 8+r-8 \\ 6-2r-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -2r \end{pmatrix}$$

$$b) |\vec{QP}^*| = \sqrt{r^2 + (-2r)^2} = \sqrt{20}$$

$$\sqrt{5r^2} = \sqrt{20} \quad |(\)^2$$

$$5r^2 = 20$$

$$r^2 = 4$$

$$r = \pm 2$$

Für $r=2$ gilt $P_1^*(6|10|2)$

$$P^*(6|8+r|6-2r)$$

Für $r=-2$ gilt $P_2^*(6|6|10)$

$$P(6|4|4)$$

Da P^* oberhalb von P liegen muss, kommt

wur $P_2^*(6|6|10)$ in Frage.

X_3 -Wert muss größer sein!