Musterlösung 2014 A2

Aufgabe A 2.1:

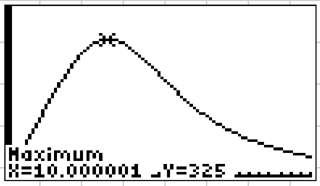
Die Anzahl ankommender Fahrzeuge vor einem Grenzübergang soll modelliert werden. Dabei wird die momentane Ankunftsrate beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1300000 \cdot t}{t^4 + 30000} \quad ; \quad 0 \le t \le 30$$

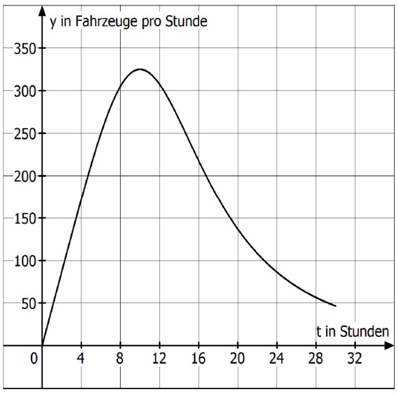
(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn ; f(t) in Fahrzeuge pro Stunde).

Anfangs befinden sich keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
Wann ist die momentane Ankunftsrate maximal ?
Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden ankommen.
(4 VP)



Skizze :



Maximale Ankunftsrate

1) Gesucht ist t mit $f(t)$ maximal.

2) GTR : $t = 10$

3) 10 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Ankunftsrate maximal.

Anzahl der in den ersten 6 Stunden ankommenden Fahrzeuge

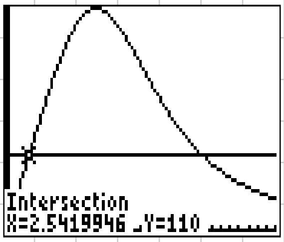
1)
2) $\int_0^6 f(t)\,dt \underset{GTR}{\approx} 769{,}05$

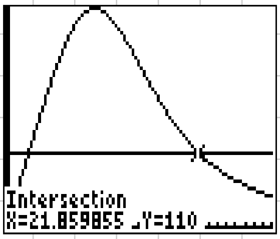
3) In den ersten 6 Stunden kommen ca. 770 Fahrzeuge an.

b) Am Grenzübergang werden die Fahrzeuge möglichst schnell abgefertigt, jedoch ist die momentane Abfertigungsrate durch 110 Fahrzeuge pro Stunde begrenzt.
Wann beginnen sich die Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen ?
Wie viele Fahrzeuge stauen sich maximal vor dem Grenzübergang ?
Welches Ergebnis erhielte man, wenn die momentane Abfertigungsrate 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn auf konstant 220 Fahrzeuge pro Stunde erhöht würde ?

(6 VP)

Beginn des Staus



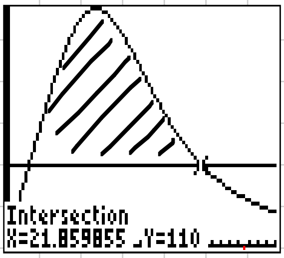


1) Gesucht ist t mit $f(t) = 110$

2) GTR: $t \approx 2{,}54$

3) Die Fahrzeuge beginnen sich etwa 2,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn zu stauen

Maximale Anzahl der Fahrzeuge vor der Grenze

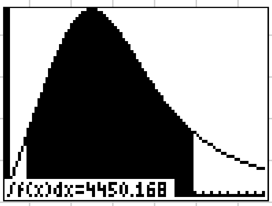


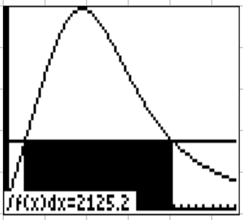
1) $\int_{2,54}^{21,86} (f(t) - 110)\, dt \approx 2324{,}97$ 2) GTR

Oder:

$4450{,}168 - 2125{,}2$

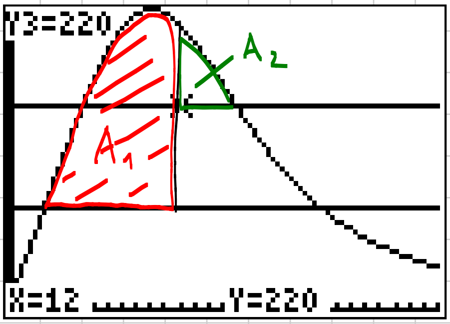
$= 2324{,}97$





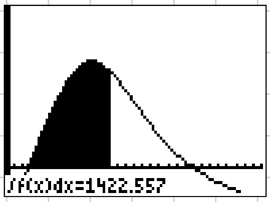
3) Es stauen sich maximal etwa 2325 Fahrzeuge vor der Grenze.

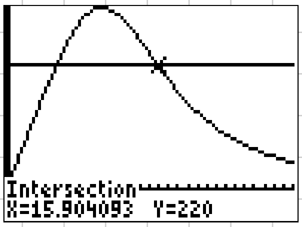
Veränderung der höheren Abfertigungsrate



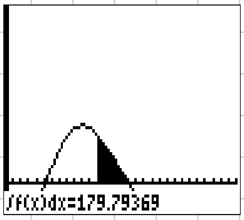
2) GTR

1) $A_1 = \int_{2,54}^{12} (f(t)-110)\,dt \approx 1422,56$





$A_2 = \int_{12}^{15,90} (f(t)-220)\,dt \approx 179,79$



Insgesamt: $1422,56 + 179,79 = 1602,35$

3) Es würden sich maximal etwa 1600 Fahrzeuge vor der Grenze stauen.

Aufgabe A 2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2 \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

Der Graph von f_a ist G_a.

a) G_a besitzt einen Extrempunkt.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten. (2 VP)

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2$$

1) Ableiten $\quad f'_a(x) = -a \cdot \sin(x)$

2) Extrempunkt $\quad -a \cdot \sin(x) = 0$

a) notw. Bed.:
$f'(x) = 0$ $\quad \sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

b) hinr. Bed.:
$f''(x) \neq 0$ $\quad$ nicht notw., da es laut Aufgabenstellung einen Extrempunkt gibt

3) Koordinaten des Extrempunktes: $\quad f_a(0) = a \cdot \cos(0) - a^2 = a - a^2$

d.h. $H_a(0 \mid a - a^2)$

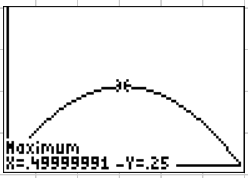
b) Durch welche Punkte der y-Achse verläuft kein Graph G_a? (3 VP)

Punkte der y-Achse, durch die kein Graph G_a verläuft.

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_a(0 \mid a - a^2)$

$$f_a(a) = a - a^2$$

1) Gesucht ist das Maximum von $f_a(a)$

2) 

GTR: $f_{max}(0{,}5) = 0{,}25$

3) Es verläuft durch keinen Punkt $P(0 \mid y)$ mit $y > 0{,}25$ ein Graph G_a.