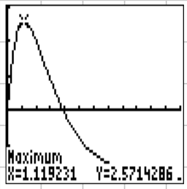
Musterlösung 2016 Aufgabe 2.1

$$s(t) = 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 2 \quad ; \quad 0 \le t \le 12$$

a) Maximale momentane Änderungrate der Scheehöhe

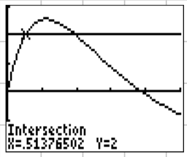
1) Gesucht ist das Maximum s_{max} des Funktion $s(t)$

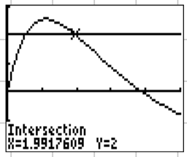


2) GTR: $s_{max} \approx 2{,}57$

3) Die maximale momentane Änderungrate beträgt ca. 2,6 cm pro Stunde.

Momentane Änderungrate größer als 2 cm pro Stunde





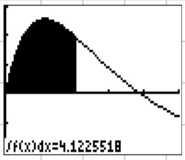
1) Gesucht ist t mit $s(t) > 2$

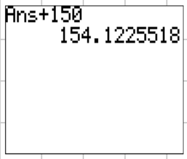
2) GTR: $t_1 \approx 0{,}51$ und $t_2 \approx 1{,}99$

3) Etwa zwischen 10:30 Uhr und 12:00 Uhr (bzw. zwischen ca. 0,5 Stunden und ca. 2,0 Stunden) ist die momentane Änderungrate des Scheehöhe größer als 2 cm pro Stunde.

Scheehöhe um 12:00 Uhr

1)
2) $$h = 150 + \int_0^2 s(t)\,dt \approx 154{,}12 \quad \text{(GTR)}$$





3) Um 12:00 Uhr beträgt die Schneehöhe ca. 154 cm.

b) Integralfreier Funktionsterm für die Scheehöhe

$$S(t) = 150 + \int_0^t s(x)\,dx = 150 + \int_0^t 16e^{-0{,}5x} - 14e^{-x} - 2 \; dx$$

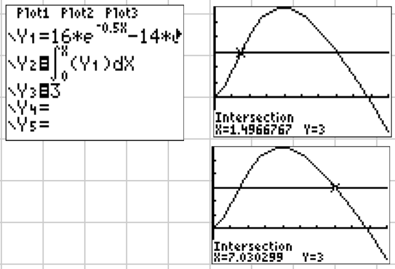
$$= 150 + \left[-32\,e^{-0{,}5x} + 14\,e^{-x} - 2x\right]_0^t$$

$$= 150 + \left[-32e^{-0{,}5t} + 14\,e^{-t} - 2t - (-32 + 14)\right]$$

$$= -32e^{-0{,}5t} + 14\,e^{-t} - 2t + 168$$

Schneehöhe 153 cm

$$150 + \int_0^t s(x)\,dx = 153 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^t s(x)\,dx = 3$$

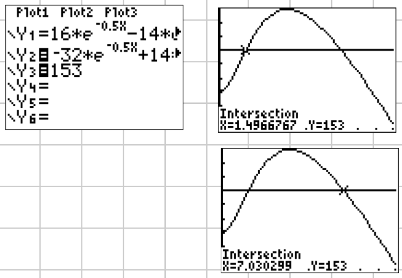


GTR $\quad x_1 \approx 1{,}50$

$\quad\quad\; x_2 \approx 7{,}03$

Oder:

$$S(t) = -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 2t + 168 \overset{!}{=} 153$$

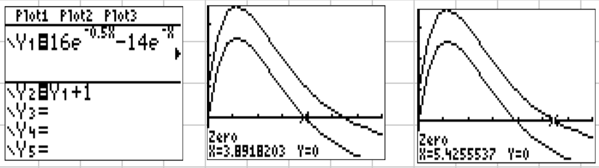


GTR: $\quad t_1 \approx 1{,}50$

$\quad\quad\quad t_2 \approx 7{,}03$

c) Verlängerung des Zeitraums, in dem die Schneehöhe zunimmt

1) $s(t) = 0 \quad$ GTR $\; t \approx 3{,}89$



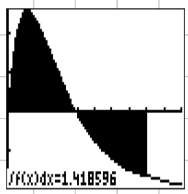
2) $s_{neu}(t) = s(t) + 1$

$s_{neu}(t) = 0 \quad$ GTR $\; t \approx 5{,}43$

$5{,}43 - 3{,}89 = 1{,}54$

3) Der Zeitraum, in dem die Scheehöhe zunimmt, verlängert sich um ca. 1,5 h

Leistung der Schneekanonen für größere Scheehöhe



Schneehöhe um 18.00 Uhr ohne Schneekanonen

$S(8) \approx 151{,}42$ (GTR) $\quad$ oder $\quad h = 150 + \int_0^8 s(t)\,dt$

$$= 150 + 1{,}42 = 151{,}42$$

Das sind $160\text{ cm} - 151{,}42\text{ cm} = 8{,}58\text{ cm}$ zu wenig.

12.30 Uhr bis 18.00 Uhr : 5,5 Stunden

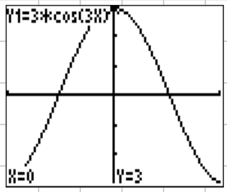
$$\frac{8{,}58\ cm}{5{,}5\ h} = 1{,}56\ \frac{cm}{h}$$

D.h. die Schneekanonen müssten ca. $1{,}6\ \frac{cm}{h}$ pro Stunde liefern.

Aufgabe A2.2

$$g_a(x) = a \cdot \cos(a \cdot x) \; ; \; -\frac{\pi}{2a} \leq x \leq \frac{\pi}{2a}$$

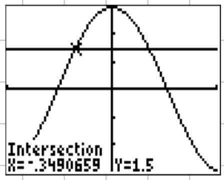
a) $a = 3 \qquad g_3(x) = 3 \cdot \cos(3x) \qquad \left(\frac{\pi}{2 \cdot 3} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}53 \right)$

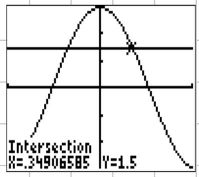


GTR: $g_3(0) = 3$ Abstand Ursprung zum Punkt $P(0|3)$ entspricht Länge der „1." Diagonalen: 3 LE

Diagonalen schneiden sich rechtwinklig: $g_3(x) = 1{,}5$

$\overset{GTR}{\Rightarrow} \; x_1 \approx -0{,}35 \; ; \; x_2 \approx 0{,}35$





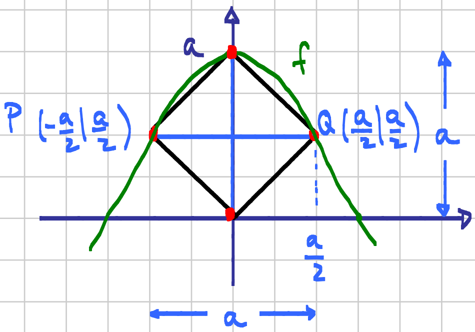
Die Längen der Diagonalen betragen somit 3 LE und 0,7 LE.

b) Quadrat $\Rightarrow$ Diagonalen sind gleich lang!

D.h. die weiteren Eckpunkte müssen die Koordinaten

$$g_a(0) = a \cdot \cos(0) = a$$

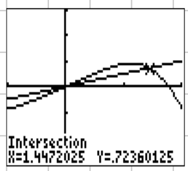
Skizze



Es muss gelten

$$g\left(\frac{a}{2}\right) = a \cdot \cos\left(a \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

GTR: $a \approx 1{,}45$



Für $a \approx 1{,}45$ ist die Raute ein Quadrat.