2016 B 1.1.

a) Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt.

$A(15|0|0)$; $B(15|20|0)$; $C(0|20|6)$

1) Parametergleichung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15-15 \\ 20-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-15 \\ 20-0 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2) Normalenvektor

$$\begin{matrix} 0 & -15 \\ 20 & 20 \\ 0 & 6 \\ 0 & -15 \\ 20 & 20 \\ 0 & 6 \end{matrix}$$

$20 \cdot 6 - 0 \cdot 20 = 120$
$0 \cdot (-15) - 0 \cdot 6 = 0$
$0 \cdot 20 - 20(-15) = 300$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3) Normalenform:

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

4) Koordinatenform:

$$E: 2x_1 + 5x_3 = 30$$

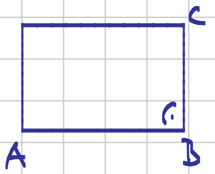
Neigungswinkel

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 21{,}8^\circ$$

Inhalt der Nutzfläche

$$A = |\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} \approx 323{,}1 \ (m^2)$$

oder:

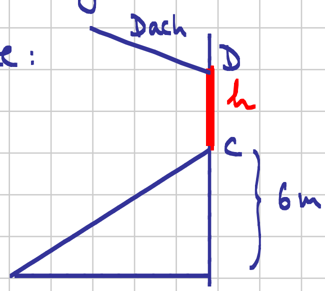


1) $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix}\right| = 20$; $|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}0-15\\20-20\\6-0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-15\\0\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{261} \approx 16,16$

2) $A = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = 20 \cdot \sqrt{261} \approx \underline{\underline{323,1}}\ (m^2)$

b) Überprüfung der Sicherheitsbedingung:

Skizze:



1) Koordinaten von $C(0|20|6)$

2) Dachfläche: $E: x_1 - 3x_3 = -27$

Koordinaten von D (vertikal über Punkt C)

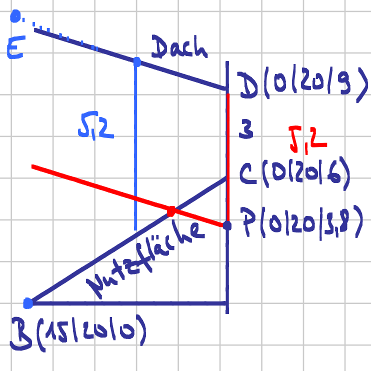
$D(0|20|9)$

$$0 - 3x_3 = -27$$
$$x_3 = 9$$

3) Somit gilt: $h = 3\ (m)$;
Sicherheitsbedingungen sind erfüllt

Punkt, in dem die Stütze fixiert wird

Idee: Gerade durch B und C schneiden mit der Geraden die durch P verläuft und parallel zur Geraden durch D und E ist.



Gerade durch B und C

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}15\\20\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-15\\0\\6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0-15\\20-20\\6-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\0\\6\end{pmatrix}$$

Koordinaten von E (senkrecht über Punkt B)

$E: x_1 - 3x_3 = -27$

$B(15|20|0)$; $E(15|20|x_3)$

$$15 - 3x_3 = -27$$
$$-3x_3 = -42$$
$$x_3 = 14$$

d.h. $E(15|20|14)$

Vektor $\overrightarrow{DE}$

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}15-0\\20-20\\14-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\0\\5\end{pmatrix}$$

Koordinaten von P
(5,2 LE unter $D(0|20|9)$)

$P(0|20|3,8)$

Gerade h durch P(0|20|3,8) mit $\begin{pmatrix}15\\0\\5\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\20\\3{,}8\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}15\\0\\5\end{pmatrix}$$

Schnitt der Geraden g und h

$$\begin{pmatrix}15\\20\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-15\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\20\\3{,}8\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}15\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 15 - 15t &= 15r \\ 20 &= 20 \\ 6t &= 3{,}8 + 5r \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} -15r - 15t &= -15 \quad (1) \\ -5r + 6t &= 3{,}8 \quad (2) \end{aligned}$$

Oder mit dem GTR lösen

$$\begin{aligned} r + t &= 1 \quad (1^*) \quad \Big|\cdot 5 \\ -5r + 6t &= 3{,}8 \quad (2) \quad \Big] \oplus \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r + t &= 1 \quad (1^*) \\ 11t &= 8{,}8 \quad (3) \end{aligned}$$

$$t = 0{,}8$$

Koordinaten des gesuchten Punktes S

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix}15\\20\\0\end{pmatrix} + 0{,}8\begin{pmatrix}-15\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\20\\4{,}8\end{pmatrix} \qquad S(3|20|4{,}8)$$

Oder: 1) Gerade durch B und C : $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}15\\20\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-15\\0\\6\end{pmatrix}$ (s.o.)

2) Der Punkt P(0|20|3,8) befindet sich 5,2 LE unter dem Punkt D.

3) Die zu E parallele Ebene durch den Punkt P hat die Gleichung

$E^*: \; x_1 - 3x_3 = -11{,}4$

4) Der Schnitt der Gerade g mit der Ebene E^* führt zu

$x_1 = 3$ und $x_3 = 4{,}8$.

Das untere Ende der Stütze wird somit im Punkt S(3|20|4,8) befestigt.