

2016 B 1.1.

a) Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt.

$$A(15|0|0); B(15|20|0); C(0|20|6)$$

1) Parametrgleichung:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 15 - 15 \\ 20 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 - 15 \\ 20 - 0 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2) Normalenvektor

$$\begin{array}{r} 0 \quad -15 \\ 20 \quad 20 \\ 0 \quad 6 \\ 0 \quad -15 \\ 20 \quad 20 \\ 0 \quad 6 \end{array}$$

$$20 \cdot 6 - 0 \cdot 20 = 120$$

$$0 \cdot (-15) - 0 \cdot 6 = 0$$

$$0 \cdot 20 - 20 \cdot (-15) = 300$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3) Normalenform:

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

4) Koordinatenform:

$$E: 2x_1 + 5x_3 = 30 //$$

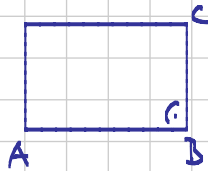
Neigungswinkel

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha = 21,8^\circ$$

Inhalt der Nutzfläche

$$A = |\vec{n}| = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 323,1 // (\text{m}^2)$$

oder:

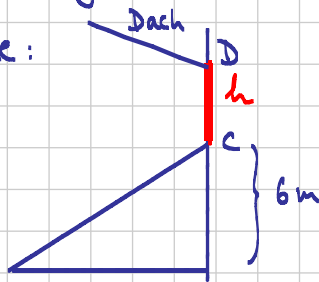


$$1) |\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 20; |\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 20 & -20 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{261} = 16,16$$

$$2) A = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| = 20 \cdot \sqrt{261} \approx 323,1 \text{ (m}^2\text{)}$$

6) Überprüfung der Sicherheitsbedingung:

Skizze:



1) Koordinaten von C (0|20|6)

2) Dachfläche: E: $x_1 - 3x_3 = -27$

Koordinaten von D (vertikal über Punkt C)

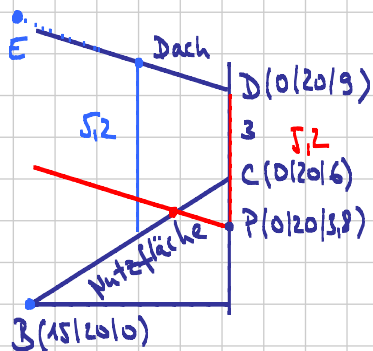
D(0|20|9)

$$\begin{aligned} 0 - 3x_3 &= -27 \\ x_3 &= 9 \end{aligned}$$

3) Somit gilt: $h = 3 \text{ (m)}$.
Sicherheitsbedingungen sind erfüllt

Punkt, in dem die Stütze fixiert wird

Idee: Gerade durch B und C schneiden mit der Geraden die durch P verläuft und parallel zur Geraden durch D und E ist.



Gerade durch B und C

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 20 & -20 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von E (senkrecht über Punkt B)

$$E: x_1 - 3x_3 = -27$$

$$B(15|20|0); E(15|20|x_3) \quad 15 - 3x_3 = -27$$

$$\begin{aligned} -3x_3 &= -42 \\ x_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } E(15|20|14)$$

Koordinaten von P (5,2 LE unter D(0|20|9))

$$P(0|20|3,8)$$

Vektor \vec{PE}

$$\vec{PE} = \begin{pmatrix} 15 & -0 \\ 20 & -20 \\ 14 & -3,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gerade h durch P(0|20|3,8) mit $\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 3,8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Schnitt der Geraden g und h

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 3,8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$15 - 15t = 15r \quad (1)$$

$$20 = 20 \quad (2)$$

$$6t = 3,8 + 5r$$

\leadsto

$$-15r - 15t = -15 \quad (1)$$

$$-5r + 6t = 3,8 \quad (2)$$

$$r + t = 1 \quad (1^*)$$

$$-5r + 6t = 3,8 \quad (2)$$

$$r + t = 1 \quad (1^*)$$

$$11t = 8,8 \quad (3)$$

Oder mit dem
GTR lösen

$\left[\begin{array}{c} 15 \\ 5 \end{array} \right] \oplus$

Koordinaten des gesuchten Punktes S

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,8 \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 4,8 \end{pmatrix} \quad S(3|20|4,8)$$

$$t = 0,8$$

Oder: 1) Gerade durch B und C: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ (s.o.)

2) Der Punkt P(0|20|3,8) befindet sich 5,2 LE unter dem Punkt D.

3) Die zu E parallele Ebene durch den Punkt P hat die Gleichung

$$E^*: x_1 - 3x_3 = -11,4$$

4) Der Schnitt der Gerade g mit der Ebene E^* führt zu

$$x_1 = 3 \text{ und } x_3 = 4,8.$$

Das untere Ende der Stütze wird somit im Punkt S(3|20|4,8) befestigt.