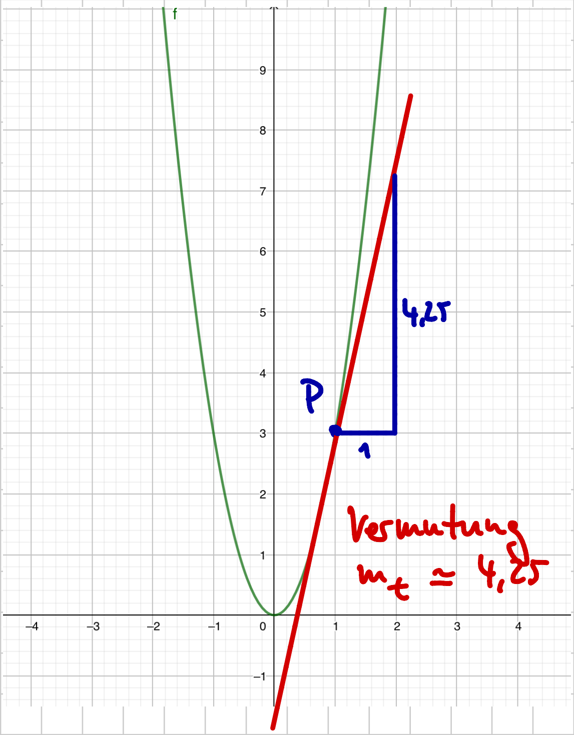
42/ 5 a) Es ist $f(x) = 3x^2$. Bestimmen Sie rechnerisch $f'(1)$ und $f'(2)$.

b) Es ist $f(x) = 4x^2$. Bestimmen Sie die Ableitung von f an den Stellen 3 und −2.

Gesucht: $f'(1)$

$P(a \mid f(a))$, $Q(x \mid f(x))$

$$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Vermutung $m_t \approx 4{,}25$

a) (1) $P(1 \mid 3)$

(2) Nachbarpunkt $Q(x \mid 3x^2)$

(3) Sekantensteigung

$$m_s = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$$

(4) Umformen

$$m_s = \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{3 \cdot \cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$
$$= 3 \cdot (x + 1)$$

(5) Tangentensteigung m_t

Für $x \to 1$ gilt $3(x+1) \to 6 = m_t$

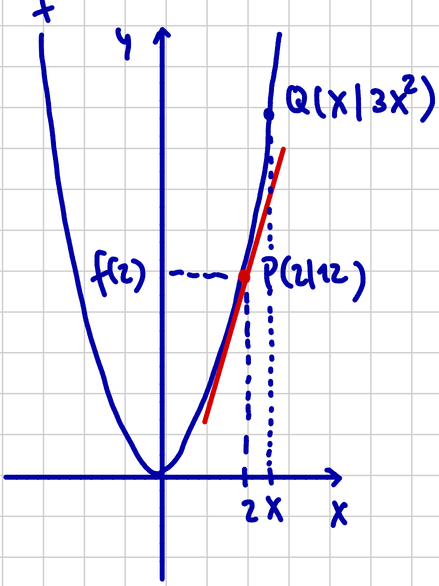
Kurz: $f'(1) = 6$ $\left(\text{bzw.} \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = 6\right)$

Gesucht: $f'(2)$

$P(a \mid f(a))$, $Q(x \mid f(x))$

$$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$f(x) = 3x^2$



$f(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

a) (1) $P(2 \mid f(2)) \to P(2 \mid 12)$

(2) Nachbarpunkt $Q(x \mid 3x^2)$

(3) Sekantensteigung

$$m_s = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$$

(4) Umformen

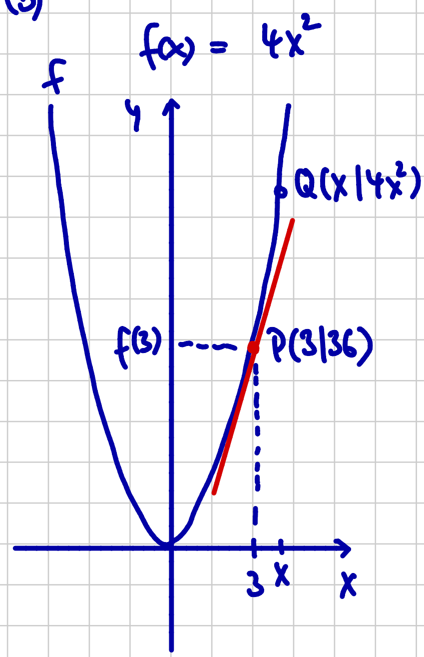
$$m_s = \frac{3(x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{3\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}$$
$$= 3 \cdot (x + 2)$$

(5) Tangentensteigung m_t

Für $x \to 2$ gilt $3(x+2) \to 12$

Kurz: $f'(2) = 12$ $\left(\text{bzw.} \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = 12\right)$

(b)



Gesucht $f'(3)$

$P(a|f(a))$, $Q(x|f(x))$
$m_s = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

a) (1) $P(3|f(3)) \Rightarrow P(3|36)$

(2) Nachbarpunkt $Q(x|4x^2)$

(3) Sekantensteigung

$$m_s = \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{4x^2-36}{x-3}$$

(4) Umformen

$$m_s = \frac{4(x^2-9)}{x-3} = \frac{4\cancel{(x-3)}\cdot(x+3)}{\cancel{(x-3)}}$$

$$= 4(x+3)$$

(5) Tangentensteigung m_t

Für $x \to 3$ gilt $4(x+3) \to 24$

Kurz: $f'(3) = 24$ $\left(\text{bzw. } \lim\limits_{x\to 3} \frac{4x^2-36}{x-3} = 24\right)$

$f(-2) = 4\cdot(-2)^2$
$= 4\cdot 4 = 16$

Gesucht $f'(-2)$

$P(a|f(a))$, $Q(x|f(x))$
$m_s = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

a) (1) $P(-2|f(-2)) \Rightarrow P(-2|16)$

(2) Nachbarpunkt $Q(x|4x^2)$

(3) Sekantensteigung

$$m_s = \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \frac{4x^2-16}{x+2}$$

(4) Umformen

$$m_s = \frac{4(x^2-4)}{x+2} = \frac{4\cdot(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}$$

$$= 4\cdot(x-2)$$

(5) Tangentensteigung m_t

Für $x \to -2$ gilt $4(x-2) \to -16$

Kurz: $f'(-2) = -16$ $\left(\text{bzw. } \lim\limits_{x\to -2} \frac{4x^2-16}{x+2} = -16\right)$