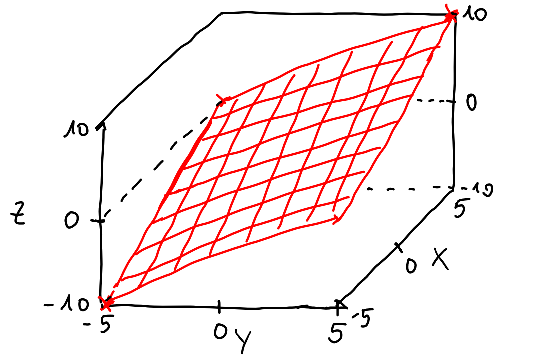
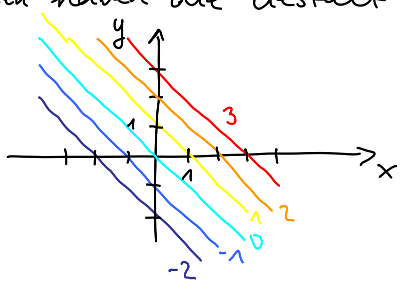
A1) $f(x,y) = x+y \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in [-5,5]\}$

Da $f(x,y)$ linear in x und y ist, liefert für $x=y=-5$ die Funktion $f(-5,-5) = -10$ den kleinsten Wert und für $x=y=5$, d.h. $f(5,5) = 10$ den größten Wert. Der Wertebereich ist $W_f = [-10,10]$.

Die Funktion sieht wie folgt aus:



Die Höhenlinien haben die Gestalt



Es soll gelten $f(x,y) = 1$, d.h. $1 = z = x+y$

$\Leftrightarrow \; y = 1-x$, d.h. die Menge aller Punkte für die gilt $f(x,y)=1$ ist eine Gerade der Form $y = 1-x$, vgl. gelbe Höhenlinie.

A2)

a) $f(x,y) = e^{-xy} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\,e^{-xy} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\,e^{-xy}$

b) $f(x,y) = 5x^2 + 2xy + y^3$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x + 2y \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 3y^2$$

c) $f(x,y) = \ln(y^2 - x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2-x}\cdot(-1) = -\frac{1}{y^2-x}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y^2-x}\cdot 2y = \frac{2y}{y^2-x}$$

$\partial y \qquad y^2-x \qquad 0 \qquad y^2-x$

d) $f(x,y) = \frac{x^2-2y}{4x+3}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(4x+3)-(x^2-2y)4}{(4x+3)^2} = \frac{4x^2+6x+8y}{(4x+3)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2}{4x+3}$

e) $f(x,y,z) = (3x^4-z^2-4y)^3$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3(3x^4-z^2-4y)^2 \cdot 12x^3 = 36x^3(3x^4-z^2-4y)^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3(3x^4-z^2-4y)^2 \cdot (-4) = -12(3x^4-z^2-4y)^2$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3(3x^4-z^2-4y)^2 \cdot (-2z) = -6z(3x^4-z^2-4y)^2$

f) $f(x,y) = \sin(x^2)e^y + 3yx^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(x^2)e^y + 6yx$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x^2)e^y + 3x^2$

g) $f(x,y) = (2x-3y^2)^5$

$\Rightarrow f_x(x,y) = 5(2x-3y^2)^4 \cdot 2 = 10(2x-3y^2)^4$

$f_y(x,y) = 5(2x-3y^2)^4 \cdot (-6y) = -30y(2x-3y^2)^4$

h) $f(x,y) = \sqrt{2xy-y^2} = (2xy-y^2)^{1/2}$

$\Rightarrow f_x(x,y) = \frac{1}{2}(2xy-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{2xy-y^2}}$

$f_y(x,y) = \frac{1}{2}(2xy-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-2y) = \frac{x-y}{\sqrt{2xy-y^2}}$

i) $f(x,t) = \frac{2t-x}{4x+t}$

$\Rightarrow f_x(x,t) = \frac{-(4x+t)-(2t-x)\cdot 4}{(4x+t)^2} = \frac{-9t}{(4x+t)^2}$

$f_t(x,t) = \frac{2(4x+t)-(2t-x)}{(4x+t)^2} = \frac{9x}{(4x+t)^2}$

j) $f(x,y) = \ln(2x+e^{3y})$

$\Rightarrow f_x(x,y) = \frac{1}{2x+e^{3y}} \cdot 2 = \frac{2}{2x+e^{3y}}$

$f_y(x,y) = \frac{1}{2x+e^{3y}} \cdot 3e^{3y} = \frac{3e^{3y}}{2x+e^{3y}}$

k) $f(x,y,z) = \frac{2x+\cos(y)}{z} \Rightarrow f_x(x,y,z) = \frac{2}{z}$

z

$f_y(x,y,z) = \frac{-\sin(y)}{z}$

$f_z(x,y,z) = -\frac{2x+\cos(y)}{z^2}$

f) $f(x,y) = \ln(\cos(x^2+y))$ [Verkettung von 3 Fkten!]

$\Rightarrow f_x(x,y) = \frac{1}{\cos(x^2+y)} \cdot (-\sin(x^2+y)) \cdot 2x = \frac{-2x\sin(x^2+y)}{\cos(x^2+y)}$

$f_y(x,y) = \frac{1}{\cos(x^2+y)} \cdot (-\sin(x^2+y)) \cdot 1 = \frac{-\sin(x^2+y)}{\cos(x^2+y)}$

A3) Der Gradient ist gegeben durch

$$\boxed{(\text{grad } f)(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}}$$

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow (\text{grad } f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

b) $f(x,y) = x\ln(xy) + x^2$

$$\Rightarrow (\text{grad } f)(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(xy) + \frac{x}{xy} \cdot y + 2x \\ \frac{x}{x \cdot y} \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(xy) + 1 + 2x \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

c) $f(x,y,z) = x\cos(y) + 2y^2 - \sqrt{z}$

$$\Rightarrow (\text{grad } f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(y) \\ -x\sin(y) + 4y \\ -\frac{1}{2\sqrt{z}} \end{pmatrix}$$

d) $f(x,y) = \ln(x)y^4 - \cos(y)x$

$$\Rightarrow (\text{grad } f)(x,y) = \begin{pmatrix} y^4 \cdot \frac{1}{x} - \cos(y) \\ 4\ln(x)y^3 + x\sin(y) \end{pmatrix}$$

e) $f(x,y) = \frac{e^x + 2y}{3x - y^2}$

$$\Rightarrow (\text{grad } f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{e^x(3x-y^2) - 3(e^x+2y)}{(3x-y^2)^2} \\ \frac{2(3x-y^2) + 2y(e^x+2y)}{(3x-y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3e^x(x-1) - y(e^x y + 6)}{(3x-y^2)^2} \\ \frac{6x + 2y^2 + 2ye^x}{(3x-y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2(3x-y^2)+2y(e+2y)}{(3x-y^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6x+2y^2+2ye}{(3x-y^2)^2} \end{pmatrix}$$

f) $f(x,y,z) = x^2 \ln(y-z) + y \sin(z)$

$$\Rightarrow (\mathrm{grad} f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \ln(y-z) \\ \frac{x^2}{y-z} + \sin(z) \\ -\frac{x^2}{y-z} + y\cos(z) \end{pmatrix}$$

A4) $f(x,y) = 5xe^{-xy} + \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + \cos(\pi x + y)$

$$\cdot\ f_x(x,y) = 5e^{-xy} - 5xye^{-xy} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2x$$
$$- \pi \sin(\pi x + y)$$
$$= 5e^{-xy}(1-y) + \frac{x}{x^2+y^2} - \pi \sin(\pi x + y)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f_x(1,0)}} = 5 + 1 = \underline{6}$$

$$\cdot\ f_y(x,y) = -5x^2e^{-xy} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2y - \sin(\pi x + y)$$
$$= -5x^2e^{-xy} + \frac{y}{x^2+y^2} - \sin(\pi x + y)$$
$$\Rightarrow \underline{f_y(0,1)} = \underline{1 - \sin(1)}$$

$$\cdot\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -10xe^{-xy} + 5x^2ye^{-xy} - \frac{y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$- \pi \cos(\pi x + y)$$
$$= 5xe^{-xy}(-2+x) - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \pi\cos(\pi x + y)$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{f_{xy}(-1,0)}} = -5(-2-1) - \pi \cdot (-1) = \underline{\underline{15 + \pi}}$$

$$\cdot\ f_{yy}(x,y) = 5x^3e^{-xy} + \frac{(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} - \cos(\pi x + y)$$
$$= 5x^3e^{-xy} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \cos(\pi x + y)$$

$$\Rightarrow f_{yy}(5,0) = 5^4 + \frac{5^2}{5^4} - \cos(5\pi)$$
$$= 5^4 + \frac{1}{25} + 1$$

$$= 5^4 + \frac{1}{25}^{5^4} + 1$$

• $f_{xyx}(x,y) = -10e^{-xy} + 10xy\,e^{-xy} + 10x\,e^{-xy} - 5x^2y\,e^{-xy}$

$$- \frac{2y(x^2+y^2)^2 - 2xy\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} + \pi \sin(\pi x + y)$$

$$= 5e^{-xy}(-2 + 2xy + 2x - x^2y)$$

$$- \frac{2yx^2 + 2y^3 - 8xy^2}{(x^2+y^2)^4} + \pi \sin(\pi x + y)$$

$\Rightarrow \underline{\underline{f_{xyx}(-1,0)}} = 5(-2-2) - \pi \sin(-\pi) = \underline{\underline{-20}}$

A5) Die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ im Punkt $P(1,2,5)$

berechne die partiellen Ableitungen f_x, f_y

$f_x(x,y) = 2x \Rightarrow \underline{\underline{f_x(1,2) = 2}}$; $f_y(x,y) = 2y \Rightarrow \underline{\underline{f_y(1,2) = 4}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{z}} = 5 + 2(x-1) + 4(y-2) = \underline{\underline{2x+4y-5}}$

2. $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$

im Punkt $P(0/0/\underbrace{f(0/0)}_{=0}) = P(0/0/0)$

Die partiellen Ableitungen lauten:

$f_x(x,y) = \cos(x) + \cos(x+y) \Rightarrow \underline{f_x(0,0) = 2}$

$f_y(x,y) = \cos(y) + \cos(x+y) \Rightarrow \underline{f_y(0,0) = 2}$

Die Tangentialebene ist gegeben durch

$\underline{\underline{z}} = 0 + 2(x-0) + 2(y-0) = \underline{\underline{2x+2y}}$

3. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-y}$ im Punkt $P(1/0/\underbrace{f(1,0)}_{=1}) = P(1/0/1)$

Die partiellen Ableitungen lauten:

$f_x(x,y) = 2x\,e^{-y} \Rightarrow \underline{\underline{f_x(1/0) = 2}}$

$f_y(x,y) = 2y\,e^{-y} - (x^2+y^2)e^{-y} \Rightarrow \underline{f_y(1/0) = -1}$

Die Tangentialebene ist gegeben durch

$f_y(x,y) = 2ye^{\cdot} - (x+y)e^{\cdot} \Rightarrow \underline{f_y(1/0) = -1}$

Die Tangentialebene ist gegeben durch

$$\underline{z} = 1 + 2(x-1) - 1\cdot(y-0) = \underline{2x-y-1}$$

A6) Bestimme relative Extremwerte

1.) $f(x,y) = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1$

Bestimme zunächst die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordng:

$f_x = 3y^2 + 12x^2 - 24x$; $f_{xx} = 24x - 24$

$f_y = 6xy - 6y$; $f_{yy} = 6x - 6$; $f_{xy} = f_{yx} = 6y$

- notwendige Bdg : $f_x = f_y = 0$, d.h.

① $3y^2 + 12x^2 - 24x = 0$ und ② $6xy - 6y = 0$

$$\Rightarrow xy = y \Rightarrow \underline{x=1} \vee \underline{y=0}$$

Bestimme nun mit Glg ① die zweite Koordinate.

Fall 1: $\underline{x=1} \Rightarrow 3y^2 + 12 - 24 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{y = \pm 2}$

Fall 2: $\underline{y=0} \Rightarrow 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow \underline{x=0} \vee \underline{x=2}$$

Somit gibt es 4 potentielle Extremstellen

$P_1(1/-2)$; $P_2(1/2)$; $P_3(0/0)$; $P_4(2/0)$

Berechne nun an den 4 Stellen die hinreichende Bdg

$$\underline{\Delta} = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$
$$= (24x-24)(6x-6) - 36y^2$$

- an $P_1(1/-2)$:

$\Delta = -36\cdot(-2)^2 = -144 < 0 \Rightarrow$ kein Extremum

- an $P_2(1/2)$:

$\Delta = -36\cdot(2)^2 = -144 < 0 \Rightarrow$ kein Extrempunkt

- an $P_3(0/0)$: $\Delta = 144 > 0 \Rightarrow$ Extremstelle,

da $f_{xx}(0/0) = -24 < 0 \Rightarrow$ Maximum in $P_3(0/0)$

- an $P_4(2/0)$: $\Delta = 144 > 0 \Rightarrow$ Extremstelle,

da $f_{xx}(2/0) = 24 > 0 \Rightarrow$ Minimum in $P_4(2/0)$

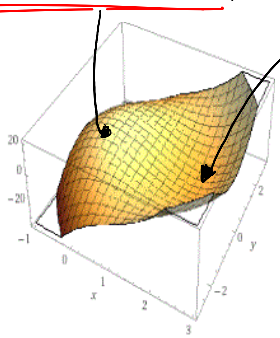
Somit die relativen Extremwerte der Funktion $f(x,y)$:

da $f_{xx}(2/0) = 24 > 0 \Rightarrow$ Minimum in $P_4(2/0)$

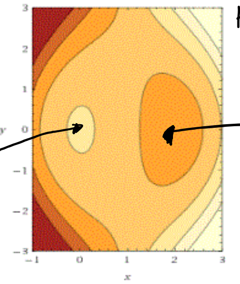
Somit die relativen Extremwerte der Funktion $f(x,y)$:

Maximum $H(0/0/1)$; Minimum $T(2/0/-15)$

in Wolfram Alpha



Höhenlinien



H

T

2) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x}$

Bestimme die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung

$f_x = 2xe^{-x} - (x^2+y^2)e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2 - y^2)$

$f_y = 2ye^{-x}$

$f_{yx} = f_{xy} = -2ye^{-x}$

$f_{xx} = -e^{-x}(2x-x^2-y^2) + e^{-x}(2-2x)$

$\quad = e^{-x}(2-4x+x^2+y^2)$

$f_{yy} = 2e^{-x}$

Die notwendige Bdg $f_x = f_y = 0$ liefert

① $\underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}(2x-x^2-y^2) = 0$ und ② $2y\underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Setze $y=0$ in ① ein $\Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2$

Somit sind $P_1(0/0)$ und $P_2(2/0)$ mögliche Extremstellen.

Teste die hinreichende Bdg $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$

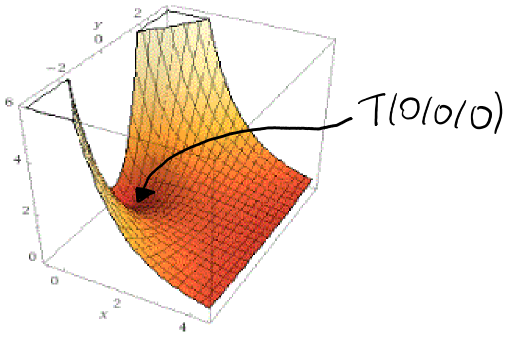
• $P_1(0/0)$: $\Delta = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0 \Rightarrow$ Extremstelle

da $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$, ist $P_1(0/0/0)$ ein Minimum.

• $P_2(2/0)$: $\Delta = -2e^{-2} \cdot (2e^{-2}) - 0^2 = -4e^{-2} < 0$

$\Rightarrow P_2(2/0)$ ist keine Extremstelle.

Mit Wolfram Alpha



3.) $f(x,y) = xy - 27\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$

Bestimme die partiellen Ableitungen 1 und 2. Ordnung.

$f_x = y + \frac{27}{x^2}$ $\qquad f_y = x - \frac{27}{y^2}$ $\qquad f_{xy} = 1$

$f_{xx} = -\frac{54}{x^3}$ $\qquad f_{yy} = \frac{54}{y^3}$

Die notwendige Bdg $f_x = f_y = 0$ liefert

① $y + \frac{27}{x^2} = 0$ und ② $x - \frac{27}{y^2} = 0 \iff x = \frac{27}{y^2}$

② in ① einsetzen liefert $y + \frac{y^4}{27} = 0 \iff \underline{y}(27 + y^3) = 0$

$\neq 0$, da nicht im Def. bereich

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -3}}$ und somit $\underline{x = 3}$

Somit ist $P(3/-3/-27)$ mögliche Extrempunkt.

Teste die hinreichende Bdg $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$ an $P(3/-3)$:

$\Delta = (-2) \cdot (-2) - 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ Extremstelle.

Da $f_{xx}(3/-3) = -2 < 0$, liegt ein Maximum vor.

A7) Das totale Differential ist gegeben durch

$$\boxed{dz = f_x\,dx + f_y\,dy}$$

1. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y-x}$

$$\Rightarrow dz = \frac{2x(y-x) - (x^2+y^2)\cdot(-1)}{(y-x)^2}\,dx + \frac{2y(y-x) - (x^2+y^2)}{(y-x)^2}\,dy$$

$$= \frac{-x^2 + 2xy + y^2}{(y-x)^2}\,dx + \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(y-x)^2}\,dy$$

2. $f(x,y) = x^2 y^2 \sin(x^3 - y^3)$

$$\Rightarrow dz = \left(2xy^2 \sin(x^3-y^3) + x^2y^2\cos(x^3-y^3)3x^2\right) dx$$
$$+ \left(2x^2y\sin(x^3-y^3) + x^2y^2\cos(x^3-y^3)\cdot(-3y^2)\right)dy$$
$$= xy^2\left(2\sin(x^3-y^3) + 3x^3\cos(x^3-y^3)\right) dx$$
$$+ x^2y\left(2\sin(x^3-y^3) - 3y^3\cos(x^3-y^3)\right) dy$$

A8) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$

Die partiellen Ableitungen lauten

$$f_x(x,y) = \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = \frac{-y^2}{(x-y)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x(x-y) - xy\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

das totale Differential ist $dz = \dfrac{-y^2}{(x-y)^2}\,dx + \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\,dy$

An der Stelle $(2/1)$ geht der Punkt über in $(2{,}1/0{,}8)$, d.h. $dx = 0{,}1$ und $dy = -0{,}2$.

Somit lautet die Änderung des Funktionswertes

$$dz = \frac{-1^2}{(2-1)^2}\cdot 0{,}1 + \frac{2^2}{(2-1)^2}\cdot(-0{,}2) = -0{,}9$$

Die Funktion $f(x,y) = z$ ändert sich an $(2/1)$ um $dz = -0{,}9$; d.h. $f(2/1) = \dfrac{2\cdot 1}{2-1} = -2$ ändert sich in der Tangentialebene zu $z + dz = -2 - 0{,}9 = \underline{\underline{-2{,}9}}$.

A9) Der Kreisektor ist gegeben durch

$$A(r,\varphi) = \frac{1}{2}r^2\varphi \qquad (\varphi \text{ im Bogenmaß})$$

mit
$$r = \bar{r} \pm \Delta r = 10 \pm 0{,}1$$
$$\varphi = \bar{\varphi} \pm \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{180}$$

Mit Hilfe von linearer Fehlerfortpflanzung wird berechnet, wie sich die Unsicherheiten in der Eingabe auf die Ausgabe, d.h. auf A auswirken. Es ist

$$A = \bar{A} \pm \Delta A_{max} \quad \text{mit} \quad \bar{A} = A(\bar{r},\bar{\varphi}) = \frac{1}{2}\cdot \underset{\bar{r}}{10}^2 \cdot \underset{\bar{\varphi}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{50\pi}{3}$$

Berechne ΔA_{max} (vgl. Folie 29)

$$\Delta A_{max} = \left|\frac{\partial A}{\partial r}(\bar{r},\bar{\varphi})\cdot\Delta r\right| + \left|\frac{\partial A}{\partial \varphi}(\bar{r},\bar{\varphi})\cdot\Delta\varphi\right|$$

$$= \left|\underbrace{10\cdot\frac{\pi}{3}}_{\frac{\partial A}{\partial r}(\bar{r},\bar{\varphi})}\cdot\underbrace{0{,}1}_{\Delta r}\right| + \left|\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 10^2}_{\frac{\partial A}{\partial \varphi}(\bar{r},\bar{\varphi})}\cdot\underbrace{\frac{\pi}{180}}_{\Delta\varphi}\right| = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} = \underline{\frac{11}{18}\pi}$$

$$= \left| \underbrace{10 \cdot \frac{\pi}{3}}_{\frac{\partial A}{\partial r}(\bar r,\bar\varphi)} \cdot \underbrace{0{,}1}_{\Delta r} \right| + \left| \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 10^2}_{\frac{\partial A}{\partial \varphi}(\bar r,\bar\varphi)} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{180}}_{\Delta\varphi} \right| = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} = \frac{11}{18}\pi$$

Der Flächeninhalt A des Kreissektors liegt im Intervall

$$A = \frac{50}{3}\pi \pm \frac{11}{18}\pi \text{, d.h. } A \in \left[\frac{289}{18}\pi, \frac{311}{18}\pi\right]$$

Zusatzbemerkung:

Betrachtet man die prozentualen Änderungen, so ergibt sich

1 % Unsicherheit im Radius $\left(\frac{\Delta r}{\bar r} \cdot 100 = \frac{0{,}1}{10} \cdot 100\right)$

1,7 % Unsicherheit im Winkel $\left(\frac{\Delta\varphi}{\bar\varphi} \cdot 100 = \frac{\pi/180}{\pi/3} \cdot 100\right)$

die Unsicherheit in den Eingabedaten resultiert in

3,7 % Unsicherheit im Kreissektorfläche A, d.h. in der Ausgabe $\left(\frac{\Delta A_{max}}{\bar A} \cdot 100 = \frac{11/18\,\pi}{50/3\,\pi} \cdot 100\right)$

A 10) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$

mit $x = \bar x \pm \Delta x = 150 \pm 3{,}0$
$y = \bar y \pm \Delta y = 100 \pm 2{,}0$

Mit linearer Fehlerfortpflanzung ergibt sich

$$f = \bar f \pm \Delta f = f(\bar x, \bar y) \pm \Delta f_{max} = \frac{150 \cdot 100}{150+100} \pm \Delta f_{max} = 60 \pm \Delta f_{max}$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x(x,y) = \frac{y^2}{(x+y)^2} \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

Somit ist

$$\Delta f_{max} = \left| f_x(\bar x,\bar y) \cdot \Delta x \right| + \left| f_y(\bar x,\bar y) \cdot \Delta y \right|$$

$$= \left| \frac{100^2}{(150+100)^2} \cdot 3 \right| + \left| \frac{150^2}{(150+100)^2} \cdot 2 \right| = |0{,}48| + |0{,}72| = 1{,}2$$

Das Messergebnis ist

$$f = 60 \pm 1{,}2 \text{ und somit ist } f \in [58{,}8\,;\,61{,}2]$$

Zusatzbemerkung:

2 % Unsicherheit in x $\left(\frac{3}{150} \cdot 100\right)$ und 2 % Unsicherheit in y $\left(\frac{2}{100} \cdot 100\right)$
resultiert in 2 % Unsicherheit in f $\left(\frac{1{,}2}{60} \cdot 100\right)$

A 11) Leistung des Gleichstroms $P(R,I) = R \cdot I^2$

mit $R = \bar{R} \pm \Delta R = (80{,}1 \pm 1{,}0)\,\Omega$ (R: Widerstand)

$I = \bar{I} \pm \Delta I = (6{,}2 \pm 0{,}1)\ A$ (I: Stromstärke)

Berechne $P = (\bar{P} \pm \Delta P_{max})\,\Omega \cdot A = (80{,}1 \cdot 6{,}2^2 \pm \Delta P_{max})\ W$

$$= (3079{,}044 + \Delta P_{max})\ W$$

Mit linearer Fehlerfortpflanzung berechnet sich

$$\Delta P_{max} = \left| \frac{\partial P}{\partial R}(\bar{R},\bar{I})\,\Delta R \right| + \left| \frac{\partial P}{\partial I}(\bar{R},\bar{I}) \cdot \Delta I \right|$$

$$= \left| 6{,}2^2 \cdot 1{,}0 \right| + \left| 2 \cdot 80{,}1 \cdot 6{,}2 \cdot 0{,}1 \right|$$

$$= \left| 38{,}44 \right| + \left| 99{,}324 \right| = 137{,}764$$

Das Messergebnis für die Leistung des Gleichstroms ist $P = (3079{,}044 \pm 137{,}764)\ W$.

Zusatzbemerkung: 1,2 % Unsicherheit in R und 1,6 % Unsicherheit in I resultiert in 4,47 % Unsicherheit in P.