Musterlösung 2015 A.2.1

Aufgabe A 2.1

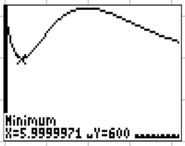
Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 lässt sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.
Die Funktion g mit $g(t) = 400 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t}$ beschreibt die Geburtenrate und die Funktion s mit $s(t) = 600 + 10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}$ beschreibt die Sterberate der Population (t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960 , g(t) und s(t) in Individuen pro Jahr).

a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate.
In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten?
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat.

(4 VP)

a) Geringste Sterberate

Gesucht: (1) Minimaler Funktionswert von $s(t)$

(2) GTR 

$s(6) = 600$

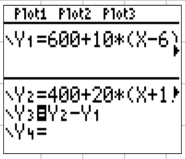
(3) Die geringste Sterberate beträgt 600 Individuen pro Jahr.

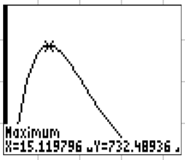
Größte Differenz aus Geburtenrate und Sterberate:

(1) Gesucht ist t mit $d(t) = g(t) - s(t)$ maximal

$d(t)$: Differenz der Geburten- minus Sterberate
Für $d(t) > 0$ folgt: Population wächst.

(2) GTR
$t \approx 15{,}12$



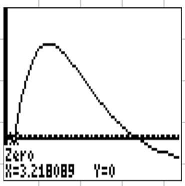


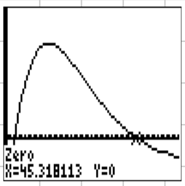
(3) Im Jahr 1975 war die Differenz aus Geburtenrate und Sterberate maximal.

Zeitraum, in dem die Population zunahm

(1) Gesucht: Nullstellen von $d(t)$

(2) GTR:
$t_1 \approx 3{,}22$
$t_2 \approx 45{,}32$





(3) Die Population hat im Zeitraum 1963 bis 2005 zugenommen.

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20 000 Individuen.
Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017.
In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960?

(3 VP)

b) **Bestand 2017**

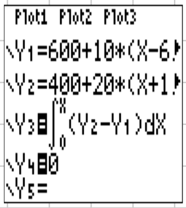
(1) $20000 + \int_0^{57} d(t)\,dt = 35\,636$ (2) GTR

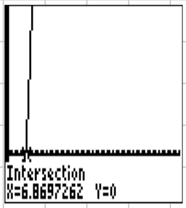
(3) Im Jahr 2017 besteht die Population aus ca. 36000 Individuen.

Wiedererreichen des Bestandes von 1960

(1) $20\,000 + \int_0^x d(t)\,dt = 20000 \quad | -20\,000$

(2) D.L. $\int_0^x d(t)\,dt = 0$





GTR $t \approx 6{,}87$

(3) Im Jahr 1966 erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960.

Betrachtet wird nun das Größenwachstum eines einzelnen Individuums der Population. Dies kann im Beobachtungszeitraum durch das Gesetz des beschränkten Wachstums modelliert werden. Man geht davon aus, dass dieses Individuum in ausgewachsenem Zustand 0,8 m groß ist. Zu Beobachtungsbeginn betragen seine Größe 0,5 m und seine momentane Wachstumsgeschwindigkeit 0,15 m pro Jahr.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Funktion, die die Körpergröße des Individuums in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50% zugenommen?

(4 VP)

Funktionsgleichung

DGL des beschränkten Wachstums: $f'(t) = k \cdot (S - f(t)) \Rightarrow f(t) = S - c e^{-kt}$

Es gilt
$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0{,}5 \\ f'(0) = 0{,}15 \\ S = 0{,}8 \end{array}\right\}$$

(1) $f'(0) = k \cdot (S - f(0))$

$0{,}15 = k \cdot (0{,}8 - 0{,}5)$

$0{,}15 = 0{,}3 \cdot k \quad | :0{,}3$

$0{,}5 = k$

(2) $f(t) = 0{,}8 - c \cdot e^{-0{,}5t}$

$f(0) = 0{,}8 - c = 0{,}5$

$\leadsto c = 0{,}3$

(3) $f(t) = 0{,}8 - 0{,}3 \cdot e^{-0{,}5t}$

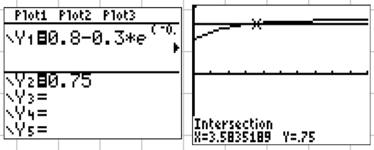
(t in Jahren, $f(t)$ in Meter)

Zunahme der Körpergröße um 50 %

Körpergröße 0,5 m 50 % von 0,5 m $\hat{=}$ 0,25 m

(1) $f(t) = 0{,}75$

(2) GTR $t \approx 3{,}58$



(3) Ca. 3,6 Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50 % zugenommen.

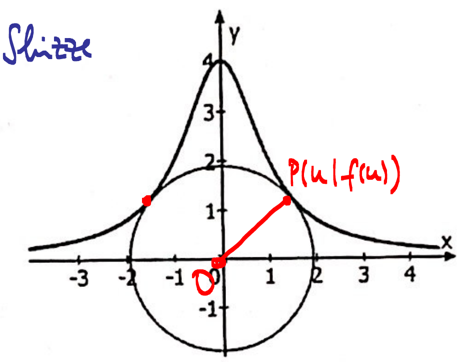
Aufgabe A 2.2

Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt $O(0|0)$ und die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$.

Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte des Kreises mit dem Graphen von f in Abhängigkeit vom Kreisradius.

(4 VP)

Skizze



(1) Abstand zwischen zwei Punkten

$$d(P,Q) = \sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2}$$

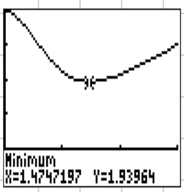
(2) 1. Punkt $O(0|0)$

2. Punkt $P(u|f(u))$ d.h. $P\left(u \middle| \frac{4}{u^2+1}\right)$

(3) $$d(P,O) = \sqrt{\left(\frac{4}{u^2+1} - 0\right)^2 + (u-0)^2}$$

$$d(P,O) = \sqrt{\left(\frac{4}{u^2+1}\right)^2 + u^2}$$

(4) GTR:



$u \approx 1{,}47$

$d(1{,}47) = \underline{\underline{1{,}94}} = d_{min}$

	Radius	gemeinsame Punkte
(5) Somit gilt:	$0 < r < 1{,}94$	0
	$d_{min} = 1{,}94$	2
	$1{,}94 < r < 4$	4
	$r = 4$	3
	$r > 4$	2