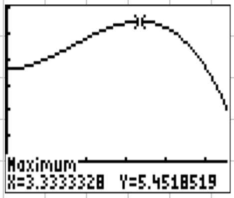
Musterlösung 2016 Aufgabe 1.1

$$f(x) = -0{,}1\,x^3 + 0{,}5\,x^2 + 3{,}6 \quad ; \quad 1 \leq x \leq 5$$

a) Höhe des höchsten Punktes

1) Gesucht ist das Maximum von $f(x)$



2) GTR : $f_{max} \approx 5{,}45$

3) Der höchste Punkt liegt auf einer Höhe von ca 545 m.

Breite des Sees

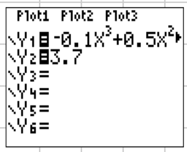
1) Ansatz : $f(x) = 3{,}7$

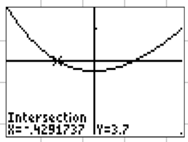
a) Lokales Minimum bei $x = 0$; $f(0) = 3{,}6$ (360 m)

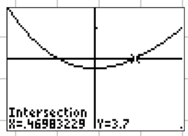
b) 360 m + 10 m = 370 m $\Rightarrow f(x) = 3{,}7$

2) GTR : $f(x) = 3{,}7 \Rightarrow x_1 \approx -0{,}43$

$x_2 \approx 0{,}47$



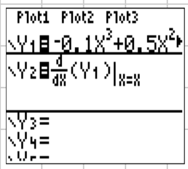


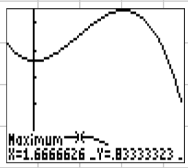


$0{,}43 + 0{,}47 = 0{,}90$

3) Der See ist ca. 90 m breit.

Steilste Stelle des Profils





1) Gesucht ist x mit $f'(x)$ maximal

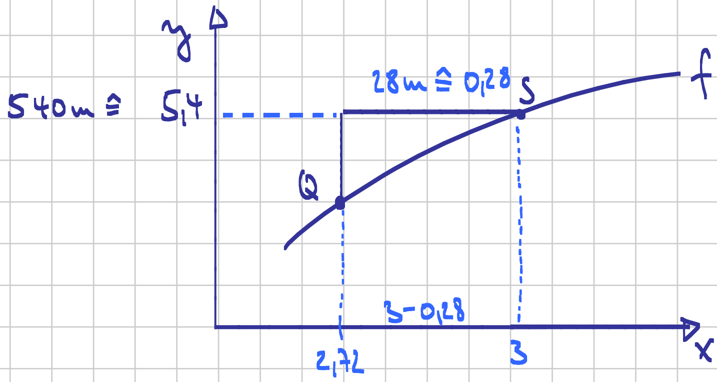
2) GTR : $x \approx 1{,}67$

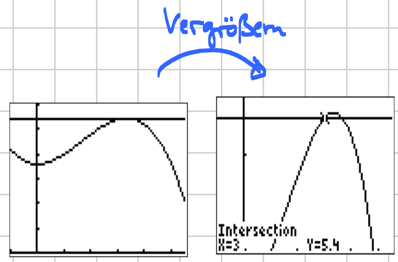
$f'(1{,}67) \approx 0{,}83 \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha) \approx 0{,}83$

$\alpha \approx 39{,}7°$

3) An der steilsten Stelle besteht Lawinengefahr.

b) Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils





1) (1) Schnittpunkt S : $f(x) = 5{,}4$

(2) GTR : $S(3|5{,}4)$

2) (1) x-Koordinate von Q : $3 - 0{,}28 = 2{,}72$

3) Gesuchter Flächeninhalt: $A = \int_{2{,}72}^{3} (5{,}4 - f(x))\,dx \overset{GTR}{\approx} 0{,}01453$

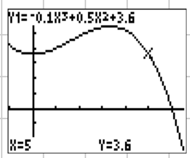
Der Flächeninhalt beträgt ca. $145\,m^2$ und ist somit größer als $130\,m^2$.

c) Höhe des tiefsten Punkts des benachbarten Tals

Ansatz: $g(x) = ax^2 + bx + c$ } 3 Unbekannte ⇒ 3 Gleichungen

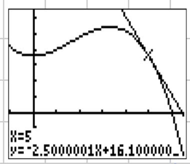
$g'(x) = 2ax + b$

zu (1)



„tiefster Punkt"

zu (2)



„ohne Knick"

Bedingungen:

$g(5) = f(5) = 3{,}6$ (1)

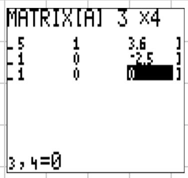
$g'(5) = f'(5) = -2{,}5$ (2)

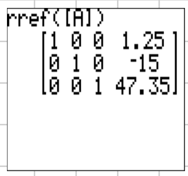
$g'(6) = 0$ (3)

$25a + 5b + c = 3{,}6$ (1)

$10a + b = -2{,}5$ (2)

$12a + b = 0$ (3)

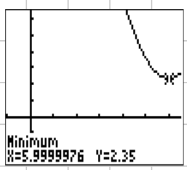




GTR $a = 1{,}25$

$b = -15$

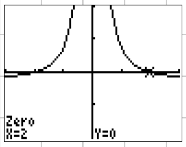
$c = 47{,}35$



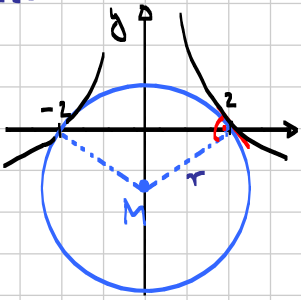
Die Funktion $g(x) = 1{,}25x^2 - 15x + 47{,}35$ hat das Minimum $g_{min} = 2{,}35$. Höhe des tiefsten Punktes: 235 m.

Aufgabe A 1.2 $\qquad h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$

1) $h(x) = 0 \qquad$ GTR $\qquad x_1 = -2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_2 = 2$

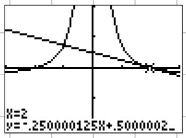


2) Skizze



Gesucht ist der Schnittpunkt der Normalen durch $N(2|0)$ mit der y-Achse

(1) Steigung der Tangente:



$h'(2) = -0{,}25 = -\frac{1}{4}$
GTR

2) Steigung der Normalen
$m_t \cdot m_n = -1$

$-\frac{1}{4} \cdot m_n = -1$

$m_n = 4$

3) Gleichung der Normalen:

$n: \quad y = m \cdot x + c$

$\left.\begin{array}{l} N(2|0) \\ m_n = 4 \end{array}\right\} \quad 0 = 4 \cdot 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = -8$

d.h. $n: \quad y = 4x - 8$

4) Schnittpunkt mit y-Achse: $S(0|-8)$ $\qquad$ Die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises $S(0|-8)$.