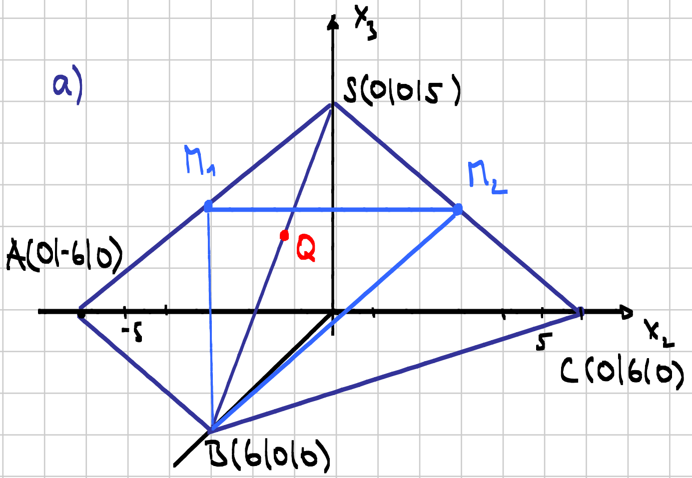
2016 B2.1

a)



Koordinaten von M_1 und M_2

$$M_1\left(\frac{0+0}{2}\,\middle|\,\frac{-6+0}{2}\,\middle|\,\frac{0+5}{2}\right) \Rightarrow M_1(0|-3|2{,}5)$$

$$M_2\left(\frac{0+0}{2}\,\middle|\,\frac{6+0}{2}\,\middle|\,\frac{0+5}{2}\right) \Rightarrow M_2(0|3|2{,}5)$$

Umfang der Schnittfläche

1) $$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-(-3) \\ 2{,}5-2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{M_1M_2}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 6$$

2) $$\overrightarrow{BM_1} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ -3-0 \\ 2{,}5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BM_1}| = \sqrt{(-6)^2+(-3)^2+2{,}5^2}$$

3) $$\overrightarrow{BM_2} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 3-0 \\ 2{,}5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BM_2}| = \sqrt{(-6)^2+3^2+2{,}5^2}$$

$$U = 6 + \sqrt{(-6)^2+(-3)^2+2{,}5^2} + \sqrt{(-6)^2+3^2+2{,}5^2} \approx 20{,}32 \text{ LE}$$

Koordinatengleichung von E

B(6|0|0) ; $M_1(0|-3|2{,}5)$; $M_2(0|3|2{,}5)$

1) Parameterform: $$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

2) Normalenvektor:

$$\begin{array}{cc} -6 & -6 \\ -3 & 3 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \\ -6 & -6 \\ -3 & 3 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -7{,}5 - 7{,}5 = -15 \\ -15 + 15 = 0 \\ -18 - 18 = -36 \end{array} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Vereinfachung des Normalenvektors $$\vec{n}^* = -\frac{1}{3}\vec{n} \qquad \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3) Normalenform: $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$

4) Koordinatenform von E: $E: \; 5x_1 + 12x_3 = 30$

b) <u>Koordinaten von Q</u> (liegt auf Kante BS)

1) Gerade g durch B und S

a) $\vec{BS} = \begin{pmatrix} 0 - 6 \\ 0 - 0 \\ 5 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Gerade g: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$

c) Punktdarstellung von Q

$Q_t(6-6t \,|\, 0 \,|\, 5t)$

2) <u>Rechter Winkel bei Q (vgl. Skizze)</u>

Es muss gelten $\vec{QM_1} \cdot \vec{QM_2} = 0$

Skalarprodukt

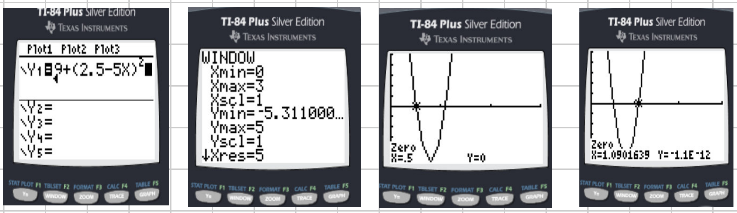
$M_1(0|-3|2{,}5)$
$M_2(0|3|2{,}5)$
$Q_t(6-6t|0|5t)$

$$\vec{QM_1} = \begin{pmatrix} 0 - (6-6t) \\ -3 - 0 \\ 2{,}5 - 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+6t \\ -3 \\ 2{,}5-5t \end{pmatrix}$$

$$\vec{QM_2} = \begin{pmatrix} 0 - (6-6t) \\ 3 - 0 \\ 2{,}5 - 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+6t \\ 3 \\ 2{,}5-5t \end{pmatrix}$$

$$\vec{QM_1} \cdot \vec{QM_2} = \begin{pmatrix} -6+6t \\ -3 \\ 2{,}5-5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6+6t \\ 3 \\ 2{,}5-5t \end{pmatrix} = (-6+6t)^2 - 9 + (2{,}5-5t)^2 \overset{!}{=} 0$$

GTR:



$t_1 = 0{,}5$

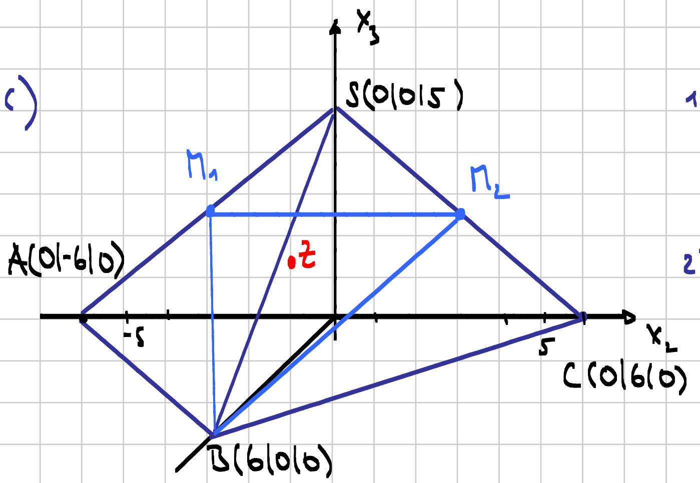
$t_2 \approx 1{,}09$

Für $t = 0{,}5$ ergibt sich $Q(3|0|2{,}5)$ $\qquad Q_t(6-6t \mid 0 \mid 5t)$

Für $t = 1{,}09$: $Q(-0{,}54|0|5{,}45)$

Dieser liegt jedoch nicht auf der Kante BS, da der x_1-Wert negativ ist.

c)



1) Z liegt in x_1x_3-Ebene

$\Rightarrow Z(x_1 \mid 0 \mid x_3)$

2) Abstand von der Grundfläche ABC und der Seitenfläche ACS ist gleich groß

$\Rightarrow \underset{r_1}{Z(a} \mid \underset{r_2}{0} \mid \underset{r_3}{a})$

x_1 und x_3 Koordinate müssen gleich groß sein

3) Der Abstand von Z zu E muss somit auch a betragen:

$$d(Z,E) = \left| \frac{5\cdot a + 12a - 30}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right| \overset{!}{=} a$$

$R(r_1|r_2|r_3)$

$$d(r,E) = \left| \frac{a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

$E: 5x_1 + 12x_3 = 30$

d.h. $\left| \frac{17a - 30}{13} \right| = a$

1. Fall $\frac{17a-30}{13} = a$

$17a - 30 = 13a$

$4a = 30$

$a = 7{,}5$

2. Fall $\frac{17a-30}{13} = -a$

$17a - 30 = -13a$

$30a = 30$

$a = 1$

Für $a = 7{,}5$ ergibt sich der Punkt $Z_1(7{,}5|0|7{,}5)$. Dieser liegt außerhalb der Pyramide.

Für $a = 1$ ergibt sich der Punkt $Z_2(1|0|1)$.