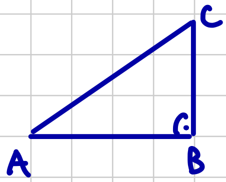
Analytische Geometrie B 2

Gegeben sind die Punkte $A(6|1|0)$, $B(4|5|-4)$ und $C(-2|8|2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel besitzt.
Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Es gibt einen Punkt D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten von D.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks 54 FE beträgt.
(Teilergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$)

(5 VP)

Rechter Winkel bei B



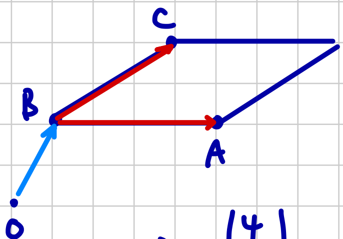
$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 1-5 \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 8-5 \\ 2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -12 - 12 + 24 = 0 \qquad \text{q.e.d}$$

Koordinatengleichung von E $A(6|1|0)$, $B(4|5|-4)$, $C(-2|8|2)$

(1) Parameterform:



$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 1-5 \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 8-5 \\ 2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) Normalenvektor

2	-6			
-4	3	1	$-24-12$	$= -36$
4	6	2	$-24-12$	$= -36$
2	-6	3	$6-24$	$= -18$
-4	3			
4	6			

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -36 \\ -36 \\ -18 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) Normalenform

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

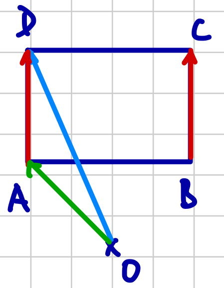
(4) Koordinatenform

$$E: \; 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

Koordinaten von D

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 8-5 \\ 2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$A(6|1|0)$, $B(4|5|-4)$, $C(-2|8|2)$



$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow D(0|4|6)$

Nachweis

$$A_{Rechteck} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{81} \cdot \sqrt{36} = 9 \cdot 6 = 54 \text{ (FE)}$$

ODER MIT VEKTORPRODUKT

b) Es gibt Pyramiden mit der Grundfläche ABCD, die das Volumen 108 VE haben.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze einer solchen Pyramide.

(2,5 VP)

(1)

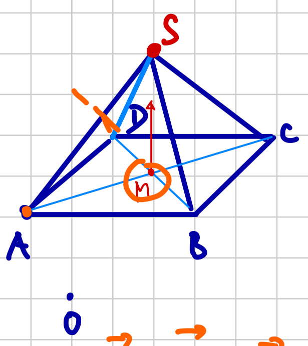
$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$108 = \frac{1}{3} \cdot 54 \cdot h$$

$$108 = 18 \cdot h \qquad | : 18$$

$$6 = h$$

(2)



$\vec{OS} = \vec{OA} + 2\vec{n}$

a) Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

c) $M_{\overline{AC}}\left(\frac{6+(-2)}{2} \,\middle|\, \frac{1+8}{2} \,\middle|\, \frac{0+2}{2}\right)$

$A(6|1|0)$, $B(4|5|-4)$, $C(-2|8|2)$

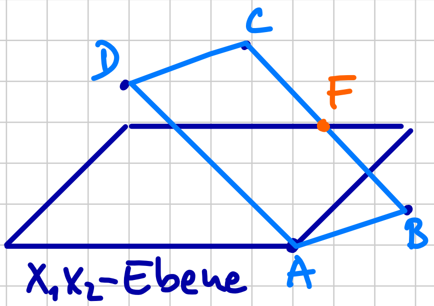
$M_{\overline{AC}}(2 \,|\, 4{,}5 \,|\, 1)$

d) $$\vec{OS} = \vec{OM} + 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$S(6|8{,}5|3)$ Musterlösung: Es gibt Pyramiden ...

c) Ein Teil der Fläche des Rechtecks ABCD befindet sich unterhalb der x_1x_2-Ebene.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Teilfläche.

(2,5 VP)



$A(6|1|0)$
$B(4|5|-4)$
$C(-2|8|2)$
$D(0|4|6)$

<u>Gerade g durch B und C</u>

$$\vec{x} = \vec{OB} + t\,\vec{BC} = \begin{pmatrix}4\\5\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}$$

<u>Punktprobe mit $F(x_1|x_2|0)$</u>

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 4 + \frac{2}{\cancel{3}_1}\cdot(-\cancel{6}^{2}) = 0\\
x_2 &= 5 + \frac{2}{\cancel{3}_1}\cdot 3 = 7\\
0 &= -4 + 6t \qquad 4 = 6t \Rightarrow t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$F(0|7|0)$

<u>Flächeninhalt der Teilfläche</u>

$A(6|1|0)$, $B(4|5|-4)$, $F(0|7|0)$

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{BF} = \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$$

$A = \frac{1}{2}\cdot|\vec{BA}|\cdot|\vec{BF}|$ (rechtw. Dreieck)

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+2^2+4^2}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 = 18 \text{ FE}$$